

FULL BOOK

வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்

(பட்டப்படிப்புக்குரிய சிறப்புப்பாடம்)

திரு. ஆர். மகாதேவன்

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

க. நூ. வெ. இ. வரிசை எண்—233

வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்

(சிறப்புப் பாடம்)

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்

திரு. ஆர். மகாதேவன்

கணிதப் பேராசிரியர்,

மாநிலக் கல்லூரி,

சென்னை.

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—July, 1970

D.C.P. No. 233

VECTOR ALGEBRA (Major)

R. MAHADEVAN

Net Price Rs. 2-00
(No Discount)

Printed by

Jupiter Enterprises of Srinivasam Press,

1, Smith Lane,

Madras-2.

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பத்து ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968 ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில், நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும்' என்ற இந்நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் — கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகத்தின் 233 ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 268 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

குறிப்பு : வெக்டர் குறியீட்டை அச்சில் இருப்பதை எழுதும்போது கீழ்க்காணும் வகையில் எழுத வேண்டும்.

$$PQ = \overline{PQ}$$

$$u = u$$

1 வெக்டர் கூட்டல், கழித்தல்

வெக்டர் விளக்கம்

வேகம் (Velocity), விசை (force) உந்தம் (Momentum), திருப்பு திறன் (Moment) என்பன, திசையையும், அளவையையும் ஒருங்கே கொண்டன ஆகும். மணிக்கு 5 மைல் வேகம் என்று கூறினால் மட்டும் போதாது. திட்டமாகக் கூற வேண்டுமானால், திசையையும் குறிப்பிட வேண்டும். 'மணிக்கு 5 மைல் வேகம் கிழக்காக' என்பதும், 'மணிக்கு 5 மைல் வேகம் வடக்காக' என்பதும், அளவில் ஒன்றுயினும், திசையில் வேறுவதால் மாறுபட்ட வெவ்வேறு 'வேகங்'களாகும். இத்தகைய அளவையும் திசையையும் ஒருங்கே கொண்ட அளவைக் கணக்கைக் கையாளப் புது எண் கருத்து தேவையாகிறது. இத்தேவையை 'வெக்டர்' நிரப்புகிறது. இத்தகைய 'வெக்டர்' என்பது என்ன? அத்தகைய புது எண்ணைக் கொண்டு எவ்வாறு கணக்கிடுவது?

கணக்கிடும் விதிகள் யாவை? என்பவற்றை இச்சிறு நூலில் விளக்குவோம்.

குறியீடுகள் (Notations)

1.1 வெக்டர் எண்ணைக் குறித்தல்:

திசையுடன் கூடிய கோட்டுத் துண்டால் (Directed segment of a line) 'வெக்டர்' எண் குறிக்கப்படுகிறது. A என்ற புள்ளியிலிருந்து B எனும் புள்ளிவரை உள்ள கோட்டுத் துண்டை AB எனக் குறிப்போம். இது AB வெக்டர் ஆகும். இது ஓரெழுத்தாலும் குறிக்கப்படும். u எனக் குறிப்பதுவழக்கம். AB=u என்போம்.

1·2 |u| என்ருல் வெக்டரின் அளவைக் குறிக்கும். இங்கு AB யின் நீளம், வெக்டரின் அளவு (magnitude of the vector) எனப்படும். அதாவது AB=|u| ["அளவு u" என வாசிக்கவும்] ஆகவே 'வெக்டர்' மூன்று இயல்புகளையுடையது.

(i) அளவு: ABயின் நீளம் அளவைத் தருகிறது.

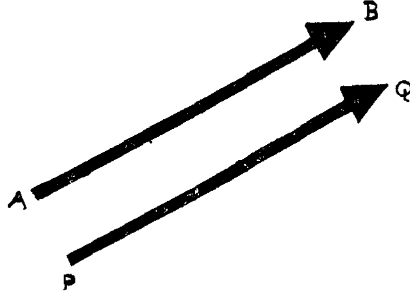
(ii) திசை: கோட்டின் திசை வெக்டரின் திசையைத் தருகிறது.

(iii) **திசையின் போக்கு** (Sense of dirction)

Aயிலிருந்து B எனும் புள்ளிவழி, திசையின் போக்காகும். Bயிலிருந்து A எனும் புள்ளிவழி திசையின் எதிர் போக்காகும்

1·3 **பூச்சியம் வெக்டர், அல்லது சுழிவெக்டர்** (Null vectro)

AA எனும் வெக்டர், பூச்சியம் வெக்டர் அல்லது சுழி வெக்டர் எனப்படும்.



படம் 1

சம வெக்டர்கள் : ஒன்றுக்கொன்று இணையாகவும் சம நீளமுமுள்ள கோட்டுத் துண்டுகள், சம வெக்டர்களாகும். படம் (1)ல் AB, PQ எனும் இரு கோட்டுத் துண்டுகள் (i) ஒரே நீளமுள்ளவை (ii) இணையானவை, (iii) ஒரே போக்குடையவை. ஆகவே வெக்டர் AB=வெக்டர் PQ மறுதலையாக வெக்டர் U=V வெக்டர் என்ருல் இரண்டும் ஒரே நீளமும் இணையாகவும், ஒரே போக்குடைய கோட்டுத் துண்டுகளைத் தரும்.

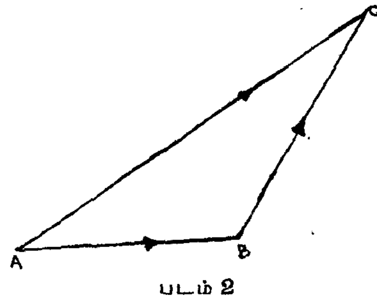
இதுவரை 'வெக்டர் எண்' எனும் கருத்தை விளக்கிஞேம். அதைக் குறிக்கும் வகையைக் கூறிஞேம். 'பூச்சியம் வெக்டர், சம வெக்டர்' என்பதையும் தெளிவுறச் செய்தோம். இனிமேல் வெக்டர் கணக்கில் முதற்படியாக 'வெக்டர் எண்களின் கூடு

தல்; அதாவது வெக்டர்எண் 'கூட்டல்' (addition vectors) என்ருல் என்ன என்பதைக் கூறுவோம்.

1·4 வெக்டர் கூட்டல் : சாதாரண எண்களின் கூடுதல், அல்லது கூட்டுத் தொகை என்பதைப் பற்றி நாம் அறிவோம். எடுத்துக் காட்டாக 2+3=5 என்று சொல்கிருேம். அதாவது 2 உருப்படிகொண்ட தொகுதியும், மூன்று உருப்படி கொண்ட தொகுதியும், எண்ணிக்கையில் 5 உருப்படி கொண்ட தொகுதியைத்தருகிறது என்பதாம்அதாவது·+···=·· ·எனவிளக்கலாம்· 2,3 என்ற இரு எண்களின் சேர்க்கைக்குப் பதிலாக '5' என்ற ஒரு எண்ணைப் பயன் படுத்தலாம். இவ்வாறு சாதாரண எண் களுக்குக் 'கூட்டல் வாய்ப்பாடு' நிறுவப்படுகிறது.

இதே போல இரண்டு வெக்டர்கள் U, V என்பவற்றைக் 'கூட்ட' ஒரு 'புது வெக்டர்' வரும் இது எவ்வாறு எனக் கூறுவோம்.

u என்பதைக் குறிக்க AB வரையவும். V என்பதைக் குறிக்க BC வரையவும். A, C ஐச் சேர்க்கவும். u,v இவற்றின் கூடுதல் AC ஆகும். இதுவே வெக்டர் கூடுதலின் 'வரையறை' (Definition) ஆகும்.



படம் 2

அதாவது

$$\boxed{AB+BC=AC}$$

இது வெக்டர் கூட்டல் வாய்ப்பாடு எனலாம்.

இதுபோலவே $PQ+QR=PR$ $LM+MN=LN$ $XY+YZ=XZ$ என வரும். இதை நன்கு நினைவில் இருத்தவும்.

இந்த வரையறையின் விளைவுகள் :

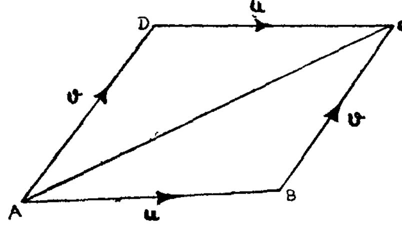
(i) $u=AB,\quad v=BC \quad \therefore \quad u+v=AB+BC=AC$

ஆனால் $AC \leq AB+BC$

$\therefore \quad |u+v| \leq |u|+|v|$

1.5 வெக்டர் கூடுதல் 'மாற்று விதிக்கு' (Commutative law) அடங்கியது.

அதாவது $u+v=v+u$



படம் 3

$AB=u$ ஆகுக

$BC=v$ ஆகுக

$\therefore\ u+v=AB+BC=AC$

BC, ABக்கு இணையாக AD, DC வரைக. அப்போது ADCB ஒரு இணைகரம்

$\therefore\ AD=BC=v$

$DC=AB=u$

$\therefore\ v+u=AD+DC=AC$ (கூட்டலின் வரையறைப்படி)

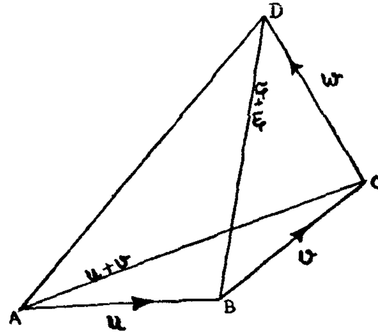
$\therefore\ \underline{u+v=v+u}$

குறிப்பு: சாதாரண எண்களுக்கு இவ்விதி பொருந்தும் என்பதை நாம் அறிவோம். அதாவது $a+b=b+a$. வெக்டர் எண்களுக்கும் இவ்விதி என நிறுவினாலன்றி, பொருந்தும்எனக் கொள்ளலாகாது.

1.6 வெக்டர் கூடுதல் 'சேர்தல்' விதிக்கும் கட்டுப்பட்டது (obeys associative law).

[சாதாரண எண்கள், 2, 3, 4 என்பவற்றைக் கூட்டும் போது $2+3=5$, பிறகு $5+4=9$ ஆகவே $(2+3)+4=9$ என்கிறோம். மூன்று எண்களை இரண்டிரண்டாக எந்த வகையில் எடுத்துக்கொண்டாலும் கூடுதல் ஒன்றே. அதாவது $2+(3+4)=9$ எந்த முறையில் சேர்த்தாலும் ஒரே கூடுதல் வருகிறது என்பதை, 'எண்கள் சேர்தல்' விதிக்குக் கட்டுப்பட்டவை என்

கிறோம். வெக்டர் எண்களுக்கும் இவ்விதி பொருந்தும் என இங்கு நிறுவுவோம்.]



படம் 4

நிரூபணம் :

$AB = u$ ஆகுக

$BC = v$ ஆகுக

$CD = w$ ஆகுக

$u + v = AB + BC = AC$

$(u+v) + w = AC + CD = AD$

$v + w = BC + CD = BD$

$\therefore\ u + (v+w) = AB + BD = AD$

$\therefore\ (u+v) + w = u + (v+w)$

குறிப்பு 1 : ஆகவே, வெக்டர் எண்கள் 'மாற்று விதி 'சேர்தல் விதி' இவற்றிற்கு அடங்குவதால், இரண்டிற்கு மேற்பட்ட எண்களின் கூடுதலை, அதாவது u, v, w ... என்ற எண்களின் கூடுதலை, $u + v + w + \ldots$ என எழுதலாம்.

குறிப்பு 2 : இதனால் வெக்டர் எண்களின் 'கூட்டல்' கிரியை, சாதாரண எண்களின் கூட்டல் 'கிரியை' ப்போலவே ஆகும் எனவும் அறிகிறோம்.

குறிப்பு 3 : பல வெக்டர்களின் கூடுதலைப் படம் வரைந்து காண AB, BC, CD · · LM, எனத் தொடர்ந்து கோட்டுத் துண்டுகளை வரைக.

அப்போது $AB + BC + CD \ldots + LM = AM$ ஆகும்.

1.7 வெக்டர் கழித்தல்

இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதல் O ஆக இருக்க வேண்டுமெனில், அவைகளின்

(i) அளவுகள் சமமாகவும்

(ii) திசைகள் எதிரெதிராகவும் இருக்க வேண்டும்.
அதாவது $AB+BA=AA=0$

ஆகவே ABஐ u எனக் குறித்தால் BAஐ $-u$ எனக் குறிக்கிறோம். அதாவது $u+(-u)=O$

குறிப்பு 1 : ஒரு வெக்டரின் எதிர் வெக்டர் என்பது அதன் அளவையும், எதிர்த்திசையையும் கொண்ட வெக்டராகும்.

குறிப்பு 2 : $u-v$ என்பதை $u+(-v)$ எனலாம்.

குறிப்பு 3 : $a+b=c$ என்றால்

இரு புறமும் $-b$ ஐச் சேர்க்க

$a+b+(-b)=c+(-b)$

ஆனால் $b+(-b)=O$ $c+(-b)=c-b$

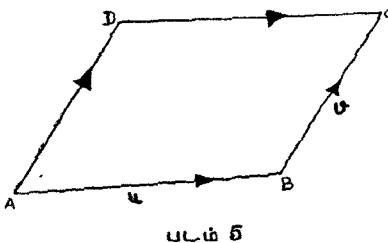
$\therefore a=c-b$

ஆகவே $a+b=c$

என்றால் $a=c-b$ என வருகிறது.

[சாதாரண அல்ஜீப்ராவில் வருவது போலவே இங்கும் வருகிறது என்பது கவனத்திற்குரியது]

குறிப்பு 4 : A B C D என்ற இணைகரத்தில்



படம் 5

$AB=u$ $BC=v$ ஆகுக.

$\therefore DC=u$ $AD=v$ ஆகும்.

$AB+BD=AD$

$\therefore BD=AD-AB$

$\therefore BD=v-u$

$AC = v + u$ என ஏற்கனவே கூறியுள்ளோம். ஆகவே ஒரு இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்கள் இரு வெக்டர்களைக் குறித்தால் அதன் மூலைக் கோடுகளில் ஒன்று அவற்றின் கூடுதலையும், மற்றது அவற்றின் வித்தியாசத்தையும் குறிக்கின்றன.

குறிப்பு 5: மேற்கூறிய இரண்டு வெக்டர்கள் u, v அளவில் சமமாக இருந்தால், அதாவது $|u| = |v|$ ஆனால் $AB = BC$ ஆகும். அப்போது இணைகரம் சாய்சதுரமாகும். சாய்சதுரத்தில் மூலைக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று குத்தானவை என நாம் அறிவோம். ஆகவே கீழ்வரும் உண்மை தெளிவாகிறது. **இரு வெக்டர்கள் அளவில் சமமானால், அவற்றின் கூடுதலும், வித்தியாசமும் ஒன்றுக்கொன்று குத்தானவை.**

மறுதலையாக இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலும், வித்தியாசமும் குத்தானால் அவை அளவில் சமமாகும்.

1.8 பெருக்கல்

திசையிலா எண்ணால் (Scalar)வெக்டரைப் பெருக்கும் முறையைக் கூறுவோம்.

$u + u = 2u$ என்பதை அறிகிறோம்.

$(-u) + (-u) = -2u$ எனவும் ஆகிறது.

இதைப் பொது விதியாகக் கூறுவோம்.

α என்ற திசையிலா எண்ணால், u எனும் வெக்டரைப் பெருக்க வருவது αu எனும் வெக்டர் ஆகும். இதன் பொருள் (அதாவது αu என்பதன் பொருள்)

(i) αu எனும் வெக்டர், u எனும் வெக்டரின் திசையையே உடையது.

(ii) அளவில் αu, u எனும் வெக்டரின் அளவைப்போல் α மடங்கு உள்ளது.

(iii) 'α' என்பது எதிரெண்ணானால் (negative) αu இன் திசைப் போக்கு, u ன் திசைப் போக்குக்கு எதிராகும்.

குறிப்பு 1

(i) $b = \alpha a$ என்றால்

வெக்டர் b யும், வெக்டர் a யும் இணை எனப் பொருளாம்.

(ii) $AB = \lambda\ BC$ என்றால்

AB, BC என்பவை ஒரே கோடாகும்.

அதாவது A, B, C என்பவை ஒரு கோடமைப்புள்ளிகளாகும்.

அன்றியும் $\frac{AB}{BC} = \lambda$ எனவுமாகும்.

குறிப்பு 2: (i) $(-\alpha)\,u = \alpha\,(-u) = -\alpha u$

(ii) $(-\alpha)\,(-u) = \alpha u$

(iii) $\alpha(\beta u) = \alpha\beta u$

(iv) $(\alpha+\beta)u = \alpha u+\beta u$

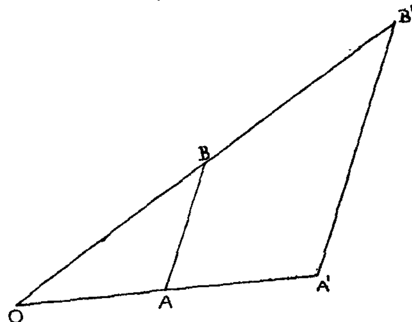
குறிப்பு 3: (i) நீளத்தில் ஒரு அலகு மட்டும் (one unit in length) உள்ள வெக்டர் 'வெக்டர் அலகு' (unit vector) எனப் படும். e என்பது ஒரு வெக்டர் அலகானால், அதே திசையை யும், அதே போல் 'a' மடங்கு நீளமும் உள்ள வெக்டர் ae ஆகும்.

(ii) a என்ற வெக்டரின் திசையில் உள்ள வெக்டர் அலகை $\hat{a}$ என்று குறிப்பது வழக்கம். $|a| = \alpha$ ஆனால் [அதாவது a என்ற வெக்டரின் நீளம் α ஆனால் $a = \alpha\,\hat{a}$ ஆகும்.]

இவ்வாறு a என்ற வெக்டரில் ஒருங்கே அடங்கியுள்ள அளவையும் திசையையும் வெளிப்படையாக எடுத்துக்காட்ட இக்குறியீடு துணை புரிகிறது.

திசையிலியால் வெக்டர் கூடுதலைப் பெருக்கல், பரவு விதிக்கு அடங்கியது என நிறுவ:

1.9 அதாவது $m\,(a+b) = ma+mb$ என நிறுவ:



படம் 6

OA = a AB = b ஆகுக.

OA எனும் கோட்டில் $OA' = mOA$ எனும்படிக் கொள்க.

A' வழி AB க்கு இணை கோடு, OB யை B' இல் சந்திக்கட்டும்.

நிரூபணம் : $OA = \mathbf{a}$ $\quad OA' = m.OA$

OA' இன் திசையும் OA வின் திசையாகும்.

$\therefore OA' = mOA = m\mathbf{a}$ (i)

$\triangle OA'B' ||| \triangle OAB$ ஆனதால்,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = m\ ; \quad \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = m$$

$\therefore A'B' = mAB \qquad OB' = mOB$

அன்றியும் $A'B' \parallel AB$

$\therefore \mathbf{A'B'} = m\,\mathbf{AB}$

$\qquad = m\mathbf{b}$

இப்போது $\mathbf{OB'} = \mathbf{OA'} + \mathbf{A'B'}$

$\qquad = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$

ஆனால் $\mathbf{OB'} = m\mathbf{OB}$

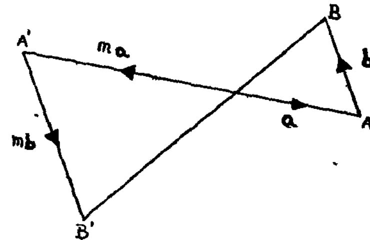
$\qquad = m(\mathbf{OA} + \mathbf{AB}) = m(\mathbf{a}+\mathbf{b})$

$\therefore m(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}$

குறிப்பு : 'm' என்பது எதிரெண்ணானாலும் இவ்விதி பொருந்தும்.

படம் 6(a) பார்க்கவும்.

ஆகவே, கூட்டல், கழித்தல் திசையிலா எண் பெருக்கல் இவை யாவும், ஏற்கனவே அறிந்துள்ள சாதாரண அல்ஜீப்ராவில் உள்ள விதிகளுக்கு அடங்கியவை என்பதைக் காண்கிறோம்.

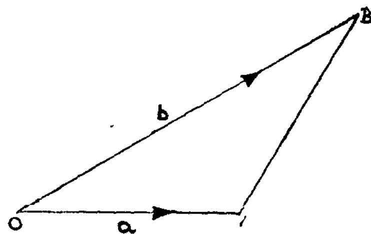


படம் 6(a)

1.10 புள்ளியின், நிலைவெக்டர் (Position vector of a point)

P என்பது ஏதேனும் வெளியில் (in the space) ஒரு புள்ளியாகுக. O எனும் ஒரு புள்ளியை மூலப்புள்ளியாகக் (origin) கொள்வோம். அப்போது Pயின் நிலையை, OP எனும் வெக்டரால் திட்டமாகக் கூற முடியும். ஒவ்வொரு புள்ளிக்குமென திட்டமாக ஒரு நிலை வெக்டரே உள்ளது. மூலப்புள்ளியை (origin) மாற்றினால் புள்ளியின் நிலை வெக்டரும் மாறும்.

குறிப்பு : A,B என்பவை இரு புள்ளிகளாகுக. O என்பதை மூலப்புள்ளியாகக் கொண்டால்,



படம் 7

Aயின் நிலைவெக்டர் OA = a ஆகும்.

Bயின் நிலை வெக்டர் OB = b ஆகும்.

ஆனால் AB = AO + OB = OB + (−OA) = b − a

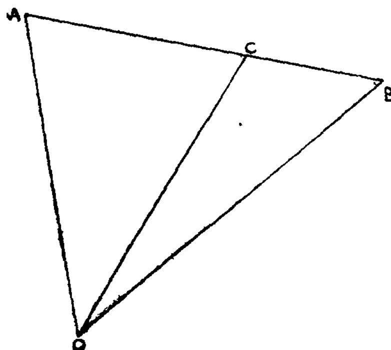
தளத்தில் உள்ள புள்ளியின் நிலையை (x, y) எனும் இரு குத்துக் கூறுகளால் கூறும் வகையை, இயல் முறை வரை கணிதத்தில் படித்திருப்பீர்கள். இங்கு புள்ளியின் நிலையை வெக்டர் எண்ணுல் சொல்கிறேம். இதை புள்ளியின் வெக்டர் கூறு (Vector Coordinate) எனினும் பொருந்தும்.

1.11 ஒருகோடமையும் மூன்று புள்ளிகள்

A B என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டில் C ஒரு புள்ளியாகுக. AC : CB = λ : 1ஆகுக. O எனும் புள்ளியை மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ள Aயின் நிலைவெக்டர் OA = aஆகுக.

B யின் நிலை வெக்டர் OB = bஆகுக.

Cயின் நிலை வெக்டர் OC = cஆகுக.



படம் 8

$$AC = \lambda CB \quad \therefore OC - OA = \lambda(OB - OC)$$
$$\therefore (c-a) = \lambda(b-c)$$
$$(1+\lambda)c = a+\lambda b$$
$$\therefore c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$ என வருகிறது.

a,b என்ற நிலை வெக்டர்களையுடைய புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டை $\lambda:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் c எனின்,

$$c = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

குறிப்பு 1 : $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ என்றால், $c = \frac{\alpha a+\beta b}{\alpha+\beta}$ ஆகும்.

குறிப்பு 2 : C, ABயின் நடுப்புள்ளியானால், $c = \frac{1}{2}(a+b)$ ஆகும்.

1.12 மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமைய விதி

A, B, C என்ற புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் a, b, c ஆகுக.

$\alpha a+\beta b+\gamma c = 0$

$\alpha+\beta+\gamma = 0$ எனும்படி மூன்று எண்கள் α, β, γ இருந்தால் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைவனவாகும்.

நிரூபணம் : A, B, C ஒரு கோடமைந்தால், C, A B, ஐ $\frac{\beta}{\alpha}$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கட்டும்.

அப்போது $c = \frac{\alpha a+\beta b}{\alpha+\beta}$

$\alpha+\beta = -\gamma$ என்றால் $\alpha a+\beta b+\gamma c = 0$

$\alpha+\beta+\gamma = 0$

என வருகிறது. ஆகவே மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தால், கூறிய விதி பொருந்துகிறது,

மறுதலையாக, விதி பொருந்தினால்

$\alpha a+\beta b = -\gamma c$ ஆனால் $-\gamma = \alpha+\beta$

$$\therefore c = \frac{\alpha a+\beta b}{\alpha+\beta}$$

$\therefore$ C எனும் புள்ளி A Bயில் அமைகிறது.

வெக்டர் பயன்படும் சில கணக்குகள்

I. வரை கணிதம்

1. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரக் கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிக் கோடுகளாகும்.

A, B, C என்ற முக்கோணத்தில் சுற்று வட்ட மையம் S ஆகுக. $\therefore$ SA = SB = SC

S ஐ மூலப்புள்ளியாகக் கொண்டு, A, B, Cயின் நிலைவெக்டர்கள் a, b, c ஆகுக.

$\therefore$ **SA** = **a**; **SB** = **b**; **SC** = **c**

a+**b**+**c** என்ற நிலைவெக்டரையுடைய O எனும் புள்ளியைக் கொள்க. $\therefore$**SO** = **a**+**b**+**c**

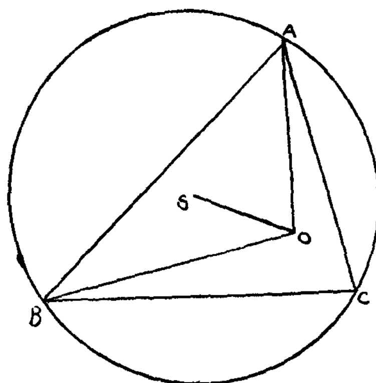
$$\therefore \mathbf{AO} = \mathbf{SO}-\mathbf{SA} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$$
$$\mathbf{CB} = \mathbf{SB}-\mathbf{SC} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$$
$$SB = SC$$

ஆனதால் $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$ $\therefore$ **b**+**c** யும் **b**−**c** யும் ஒன்றுக் கொன்று குத்தாகும். [1·7 குறிப்பு 5 ஐப் பார்க்கவும்.]

$\therefore$ AO $\perp^r$ CB ஆகும்.

இதே போல் BO $\perp$ AC

CO $\perp$ BA



படம் 9

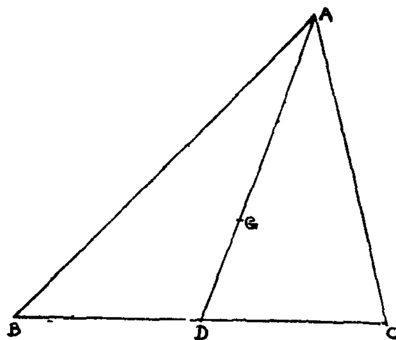
(i) குத்துயரக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. இந்தப் புள்ளியை 'குத்து சந்தி' எனக் கூறுவோம்.

(ii) S ஐ மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ள, குத்துச் சந்தியின் நிலைவெக்டர் **a** + **b** + **c** ஆகிறது.

கணக்கு 2 : (i) ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன.

(ii) அப்புள்ளி ஒவ்வொரு மையக் கோட்டினது, (பக்கத்தை அடுத்த) முச்சமக் கூறிடும் புள்ளியாகும்.

A B C என்பது முக்கோணமாகுக. BCயின் நடுப் புள்ளி D ஆகுக. ஏதேனும் ஒரு புள்ளியை [Xஐ] மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ளவும். A, B, C இவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் a, b, c ஆகுக.



படம் 10

அப்போது BD : DC = 1 : 1 ஆவதால் D யின் நிலைவெக்டர் $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

A D என்ற மையக் கோட்டில் AG : GD = 2 : 1 எனும்படி G எனும் புள்ளியைக் கொள்க. Gஇன் நிலைவெக்டர் g என்றால்,

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{a}+2\mathbf{d}}{1+2} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$$

இதே போல, B, C வழிச் செல்லும் மையக் கோட்டில் பக்கத்தை அடுத்த முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர், $\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{a}}{3}$, $\frac{\mathbf{c}+\mathbf{a}+\mathbf{b}}{3}$ என முறையே வரும். இம் மூன்றும் ஒன்றே ஆதலின் (i) மூன்று மையக் கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன என வருகிறது.

(ii) அன்றியும் அந்தப் புள்ளி, மையக் கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளி எனவும் அறிகிறோம்.

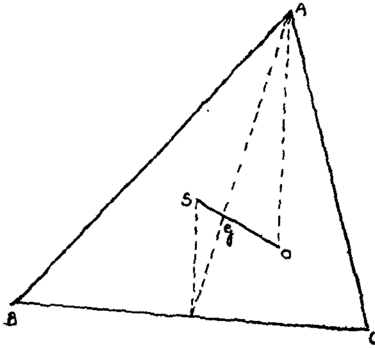
குறிப்பு 1 : அதன் நிலைவெக்டர் $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$ எனவும் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : இந்தப் புள்ளி G, மையக் கோட்டுச் சந்தி (Centroid) எனப்படும்.

கணக்கு 3 : ஒரு முக்கோணத்தின் (i) சுற்று வட்ட மையம் (S,) மையக்கோட்டுச் சந்தி G, குத்து மையம் (O) என்பவை ஒரு கோட்டமைவன. (ii) அன்றியும் SG : GO = 1:2 ஆகும்.

A B C என்பது முக்கோணமாகுக. சுற்று வட்டமையம் S ஐ மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ள, A, B, Cயின் நிலைவெக்டர்கள் முறையே a, b, c ஆகுக. ∴ குத்து மையம் O வின் நிலைவெக்டர் SO = a+b+c (கணக்கு 1 ஐக்காண்க) மையக் கோட்டுச் சந்தி G யின் நிலைவெக்டர்

$$SG = \frac{a+b+c}{3}$$ (கணக்கு 2ஐக் காண்க.)



படம் 11

∴ SO = 3SG

∴ S, O, G என்பவை ஒரு கோடமைவன (பக்கம் 7; குறிப்பு ii பார்க்கவும்)

$$\frac{SO}{SG} = \frac{3}{1}$$

∴ SG : GO = 1 : 2

கணக்கு 4 : A, B, C என்ற முக்கோணத்தில் BC யின் நடுப்புள்ளி D ஆகவும் S, O என்பவை முறையே சுற்று வட்ட மையம், குத்து மையமும் ஆனால்,

AO = 2 SD

Sஐ மூலப் புள்ளியாகக் கொண்டு, A,B,C யின் நிலை வெக்டர்கள் a, b, c ஆகுக.

$$\therefore SD = D \text{ யின் நிலை வெக்டர்} = \frac{b+c}{2}$$

Oவின் நிலை வெக்டர் a+b+c

∴ AO = SO−SA = a+b+c−a = b+c

∴ AO = 2 SD

∴ நீளத்தில் AO = 2SD(AO) || SD என்பது தெரிந்ததே.)

பயிற்சி 1

1. ABCD என்ற இணைகரத்தில் $AB = u$, $BC = v$ என்றால் CD, DA, DB, CA எந்த வெக்டர்களைக் குறிக்கின்றன ?

2. ஒரு அறுகோணத்தின் அடுத்தடுத்த இரண்டு பக்கங்கள் a, b எனும் வெக்டர்களைக் குறித்தால், மற்ற பக்கங்களை முறையே கொள்ள வரும் வெக்டர்கள் யாவை ?

3. ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் a வரைக. அதிலிருந்து $-a$, $2a$, $\frac{-a}{2}$ எனும் வெக்டர்கள் வரைக.

4. a, b எனும் ஏதேனும் இரு வெக்டர்களைக் கொள்க. அவற்றிலிருந்து $a-b$ வெக்டர் காண்க.

5. படம் வரைந்து $(a+b)+(c+d) = [(a+b)+c]+d$ என நிறுவுக.

6. ABCDEF என்பது ஒரு ஒழுங்கு அறுகோணம். சமவெக்டர்களைக் குறிக்கும் பக்கங்களை எழுதுக. $AB = u$ $BC = v$ என்றால் AC, AD, AE குறிக்கும் வெக்டர்களைக் காண்க.

7. முக்கோணம் ABC யின் சுற்று வட்டமையம் S, குத்துமையம் O என்றால் $OA+OB+OC = 2OS$ என நிறுவுக.

8. முக்கோணம் ABC யின் பக்கங்கள் BC, CA, AB. இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் D, E, F ஆகும். O ஏதேனும் ஒரு புள்ளியானால் OA, OB, OC இவற்றின் கூடுதலும் OD, OE, OF இவற்றின்கூடுதலும் சமமெனக் காட்டு.

9. A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் u, v, $2u+3v$, $u-2v$ என்றால் AC, DB, BC, CA எனும்வெக்டர்களை u, v வெக்டர்களில் கூறவும்.

10. ABCDE என்பது ஒரு ஐங்கோணம். முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் a, b, c. d, e. BC, CD, DE இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் Q, R, S என்றால் $AQ+AR+AS$இன் மதிப்பை நிலை வெக்டர்களின் சேர்க்கையாகக் கூறுக.

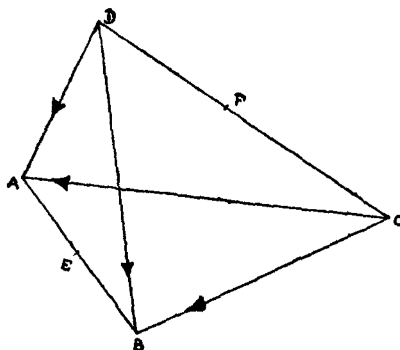
11. a, b, $3a-2b$, என்பவற்றை நிலை வெக்டர்களாக வுடைய மூன்று புள்ளிகள் P, Q, R ஒரு கோடமைவன என நிறுவுக. PQ : QR என்ற விகிதத்தின் மதிப்பு என்ன?

12. $2a+3b$, $4b-3a$, $3b-8a$ என்ற நிலைவெக்டர்கள் தரும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன என நிறுவுக.

II. நிலையியல் கணிதத்தில் வெக்டர் பயன்படும் வகை

விசை என்பதும் ஒரு வெக்டராகும். ஆகவே விசைகளைப் பற்றிய கணக்குகளில் வெக்டர் கணிதத்தைப் பயன் படுத்தும் முறையை ஒரு சில உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

கணக்கு 1 : ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம். CA, CB, DA, DB, என்பனவற்றால் தரப்படும் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்றன. E, F எனும் புள்ளிகள் AB, CD இவற்றின் நடுப்புள்ளிகளானால், விசைகளின் கூடுதல் 4 FE தரும் ஒரு விசை என நிறுவுக.



படம் 12

நிரூபணம்:

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O வை மூலப் புள்ளியாகக் கொள்வோம். A, B, C, D இவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் a, b, c, d ஆகுக.

$$\therefore OE = \frac{a+b}{2} \; ; \; OF = \frac{c+d}{2}$$

அப்போது

முதல் விசை $F_1 = CA = a-c$

2வது விசை $F_2 = CB = b-c$

3வது விசை $F_3 = DA = a-d$

4வது விசை $F_4 = DB = b-d$

இவற்றின் கூடுதல் $= (2a+2b) - (2c+2d)$

$$= 4\left[\frac{(a+b)}{2} - \frac{(c+d)}{2}\right]$$

$$= 4\,[OE-OF]$$

$\therefore$ 4 விசைகளின் கூடுதல் $= 4$ FE

கணக்கு 2: ABCD, A′B′C′D′ என்பன இரு இணைகரங்கள். AA′, B′B, CC′, D′D என்பவை தரும் 4 விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்கினால், புள்ளி நிலைபெற்று நிற்கும் என நிறுவுக

புள்ளி நிலை பெற்று நிற்கவிசைகளின் கூடுதல் O (பூச்சிய விசை) ஆகும். ஏதேனும் புள்ளி O விற்கு A, B, C, D, A′ B′ C′ D′ என்ற புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் a, b, c, d, a′ b′ c′ d′ ஆகுக.

ABCD இணைகரமானதால் $AB = DC \quad \therefore b-a = c-d$
$AD = BC \quad d-a = c-b$

இதே போல் $b'-a' = c'-d'$; $d'-a' = c'-b'$

விசைகள் $F_1 = AA' = a' - a$
$F_2 = B'B = b-b'$
$F_3 = CC' = c'-c$
$F_4 = D'D = d-d'$

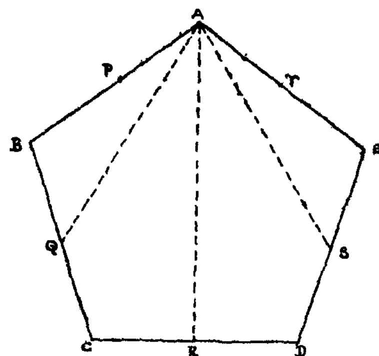
∴ விசைகளின் கூடுதல் $= (b-a) - (c-d) - (d'-a') + (c'-b') = O$

[படத்தின் தேவையின்றியே நிருபணம் எழுத முடியும் என்பது இங்கு தெளிவாகிறது]

கணக்கு 3: ஒரு ஐங்கோணத்தின் முனைகளினின்றும் அம்முனை வழிச் செல்லாத மற்ற பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளுக்கு கோடுகள் வரையப் படுகின்றன. இவ்வாறு அமையும் 15 கோடுகள் தரும் விசைகளின் கூடுதல் பூச்சியம் என நிறுவுக.

ABCDE என்பது ஒரு ஐங்கோணம். P,Q,R S,T பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகள்.

AQ, AR, AS, என்பன, A வழி உள்ள மூன்று கோடுகள். இது போன்ற மற்ற முனைகள் வழி இன்னும் 12 கோடுகள் உள்ளன. இவை தரும் விசைகளின் கூடுதல் பூச்சியம் என நிறுவ.



படம் 13

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி Oவை மூலப்புள்ளியாகக் கொள்ள, A, B, C, D, E என்ற முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் a, b, c, d, e, ஆகுக.

பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளின் வெக்டர்கள்,

$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+d}{2}, \frac{d+e}{2}, \frac{e+a}{2}$

$\therefore$ விசை $AQ = \frac{b+c}{2} - a = \frac{b+c-2a}{2}$

விசை $AR = \frac{c+d-2a}{2}$

விசை $AS = \frac{d+e-2a}{2}$

$\therefore$ A வழி விசைகளின் கூடுதல் $= \frac{1}{2}(b+2c+2d+e-6a)$

B வழி விசைகளின் கூடுதல் $= \frac{1}{2}(c+2d+2e+a-6b)$

C வழி விசைகளின் கூடுதல் $= \frac{1}{2}(d+2e+2a+b-6c)$

D வழி விசைகளின் கூடுதல் $= \frac{1}{2}(e+2a+2b+c-6d)$

E வழி விசைகளின் கூடுதல் $= \frac{1}{2}(a+2b+2c+d-6e)$

விசைகளின் கூடுதல் $= O$

(A வழி விசைகளின் கூடுதலில், வெக்டர்களின் குணகங்களது கூடுதல் 0 எனக் காண்க. இதிலிருந்தே மொத்தக் கூடுதல் O என முடிவு கட்டலாம்.)

பயிற்சி 2

1. ABCDE என்பது ஒரு ஐங்கோணம் என்றால் AB, 3BC, 2 CA, CD, DE, 2EB இவை தரும் விசைகளின் கூடுதல் பூச்சியம் என நிறுவுக.

2. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC, CA, AB என்ற பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் P, Q, R என்றால், AP, BQ, CR தரும் விசைகளின் கூடுதல் பூச்சியம் எனக் காண்க.

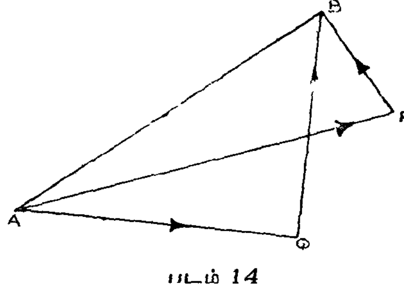
3. மேற்கணக்கில், AP, $\frac{2}{3}$ BQ, $\frac{1}{3}$ CR தரும் விசைகளின் கூடுதல் $\frac{1}{2}$ AC எனக் காண்க. (B.Sc.Sept 61)

4. O என்ற புள்ளி வழி இரு விசைகள் P,Q தாக்குகின்றன. அவற்றின் கூடுதல் R எனும் விசையாம். இவை அமையும் கோடுகளை ஒரு குறுக்கு வெட்டி A, B, C யில் வெட்டினால், $\frac{P}{OA} + \frac{Q}{OB} = \frac{R}{OC}$ என நிறுவுக.

5. ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம். AB, 2 BC, 2 CD DA, DB இவை தரும் விசைகளின் கூடுதல் என்ன ?

6. ABCD என்ற நாற்கரத்தில் AB, AD, BC, DC தரும் விசைகளின் கூடுதல் 2 AC தரும் விசை எனக் காட்டு.

1.13 வெக்டரின் பிரிவுகள் (Components of a Vector)

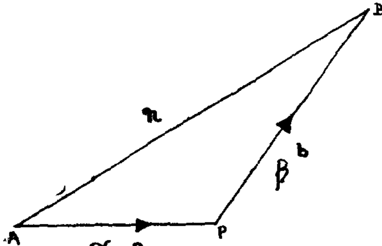


படம் 14

AB என்பது ஒரு வெக்டராகுக. AB = AP+PB எனக் கூறலாம். அதாவது AB எனும் ஒரு வெக்டரை AP, PB எனும் இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலாகக் கூறலாம். அப்போது AP, PB எனும் வெக்டர்கள், AB எனும் வெக்டரின் பிரிவுகள் (Components) எனப்படும்.

AB = AQ+QB எனவும் ஆகலாம். ஆகவே AB ஐ இரண்டு வெக்டர்களின் கூடுதலாகப் பல வகைகளில் கூறலாம் எனத் தெரிகிறது. (ஏனெனில் A B என்ற அடிப்பக்கத்தை உடைய பல முக்கோணங்கள் வரையலாமல்லவா ?)

1.14 ஒரு வெக்டரை, அதனுடன் ஒரே சமதளத்தில் அமையும் இரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக, ஒரே வகையில் மட்டும் கூற முடியும்.



படம் 15

r = AB ஆகுக.

a, b எனும் வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக (Linear Combination) r எனும் வெக்டரைக் கூற:

A வழி வெக்டர் a க்கு இணையாக AP எனும் கோடு வரைக. B வழி b க்கு இணையாக BP எனும் கோடு வரைக. அவை P யில் சந்திக்கட்டும். அப்போது AP எனும் வெக்டர், aயின் ஒரு குறிப்பிட்ட மடங்காகும்.

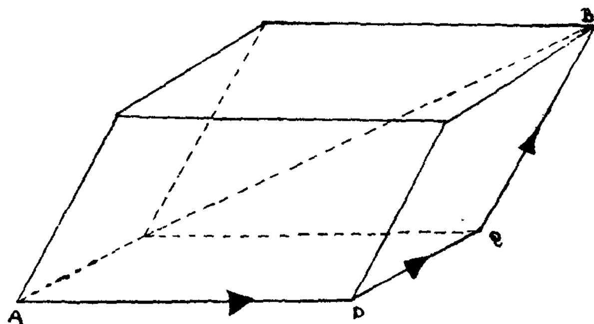
$AP = \alpha a$ இதே போல $PB = \beta b$

$\therefore r = \alpha a+\beta b$; இங்கு ஒரு படிச் சேர்க்கையாகக் கூற முடியும் என்று காட்டினோம். ஒரே வகையில் மட்டுமே (uniquely) என்பதையும் காட்டுவோம்.

r, a, b, என்பவை சமதளவெக்டர்கள். A, B வழியாக a, bக்கு இணையாக ஒவ்வொரு கோடுகளே வரைய முடியுமாதலாலும், சமதளத்தில் அமைவதால், அவை ஒரே புள்ளியில் வெட்டுமாதலாலும், r என்னும் வெக்டரை, a, bக்கு இணையாகவுள்ள வெக்டரின் கூடுதலாக ஒரே வகையில் (Uniquely) மட்டும்கூற முடியும் எனவும் தெளிவாகிறது.

குறிப்பு 1 : $r = \lambda a$ என்றால் r, a எனும் இரு வெக்டர்கள் இணை வெக்டர்கள் என்று கூறினோம். இப்போது $r = \alpha a + \beta b$ எனத் திட்டமாக வந்தால், r, a, b என்பவை சமதள வெக்டர்களாகும் எனவும் அறிகிறோம்.

1·15 a, b, c, r என்பவற்றுள், மும்மூன்றாக ஒரே தளத்தில் அமையாவிடில் $r = \alpha a + \beta b + \gamma c$ எனத் திட்டமாகக் கூற முடியும், அதாவது ஒரு வெக்டரை, ஒரே தளத்தில் அமையாத மூன்று குறிப்பிட்ட வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூற முடியும்.



படம் 16

$r = AB$ ஆகுக,

(i) A வழி, வெக்டர்கள் a, b என்பவை தரும் தளத்திற்கு இணையாக APQ எனும் சம தளத்தைக் கொள்க.

(ii) B வழியாக C க்கு இணையாக BQ எனும் கோடு வரைக. இது A P Q தளத்தை Q வில் வெட்டட்டும்.

(iii) A, Q வழி முறையே a, b க்கு இணையாக A P, Q P எனும்கோடுகள் வரைக.

(iv) இவை சமதளக் கோடுகளாதலால் P யில் வெட்டுகின்றன. இப்போது,

$AP = \alpha a$, $PQ = \beta b$, $QB = \gamma c$

$\therefore AB = AP+PQ+QB$

$\therefore r = \alpha a+\beta b+\gamma c$ என வருகிறது.

வரைதல் (i), (ii), (iii), (iv) யாவும் ஒரே வகையில் திட்டமாக அமைவதால் r என்பதை a, b, c இன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஒரேவகையில் மட்டுமே கூற முடியும்.

1·16 மேற்கூறிய தேற்றத்தின் முக்கிய விளைவைக் கூறுவோம்.

$\alpha a+\beta b+\gamma c= pa+qb+rc$ என வந்தால் $p=\alpha$; $q=\beta$; $r=\gamma$ என வருகிறது. ஏனெனில் ஒரு வெக்டரை, கொடுக்கப்பட்ட a, b, c என்ற வெக்டர்களின் ஒரு படிச்சேர்க்கையாக ஒரே வகையில் மட்டும் கூற முடியுமாதலால்.

$\alpha a = pa$ அதாவது $\alpha=p$ ஆகும்.

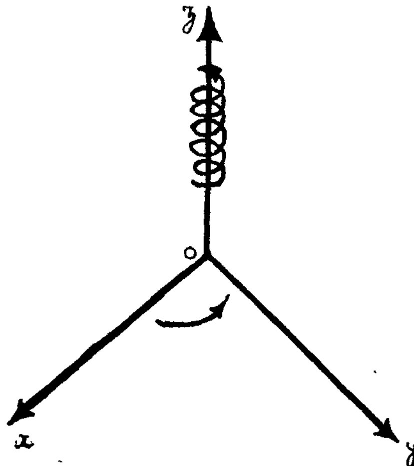
இதே போன்று $\beta=q$, $\gamma=r$ ஆகும்.

1.17 வலக்கை, இடக்கைத் திருகு மரபுகள்

(Right handed and Left handed Screw Conventions)

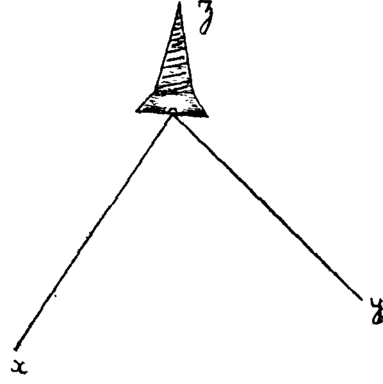
படத்தில் காட்டியபடி ox, oy, oz என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள கோடுகளாகுக. இவை வலக்கைத் திருகு மரபை ஒட்டிய குத்துக் கோடுகள் எனப்படும்

ox எனும் அச்சை oy யுடன் சேர்க்கத்திருகுவது போல் ஒரு சாதாரண இரும்புத் திருகின்முனை oz என்னும் அச்சின் முனையுள்ள திசையில் நகரும்

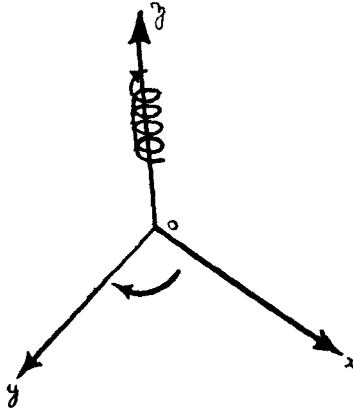


படம் 17

சீசா மூடிகளும் இத்தகைய திருகு போன்றவையாகும். வலக்கையில் உள்ள சுண்டுவிரல் மோதிரவிரல்கள் இவைகளை மடக்கிக் கொள்ளவும். நடு விரலைக் கைக்குக் குத்தாகக் கொள்ள மற்றிரு விரல்களை விரித்துக் கொண்டோம் என்றால் கட்டைவிரல் x அச்சையும், ஆள் காட்டி விரல் y அச்சையும் நடு விரல் z அச்சையும் குறிக்கும்.



படம் 18



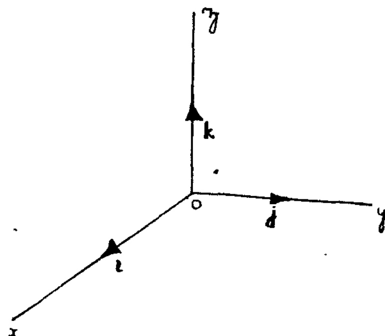
படம் 19

இடக்கைத் திருகு முறையை விவரிக்க இதேபோன்று இடக்கை விரல்களைக் கொள்ளவும். தங்கத்தினால் செய்யப்படும் காதணித் திருகுகள் இம்மரபை ஒட்டியவையாகும். நாம் இந்த நூலில் வலக்கைதிருகு முறையையே கொள்வோம்.

வெக்டர்களின் குத்துப்பிரிவுகள் :

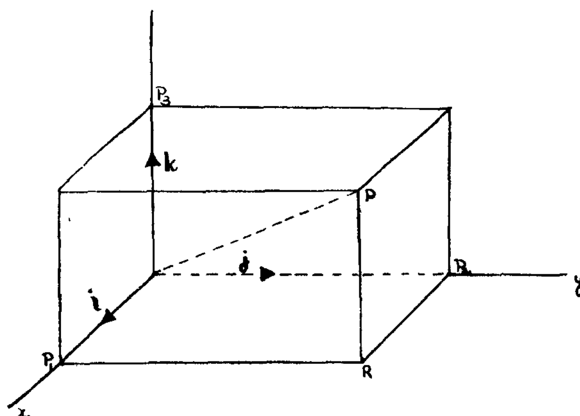
1.18 i, j, k எனும் அலகுவெக்டர்கள்

ox, oy oz என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள அச்சுகளாகுக. ox,oy, oz என்ற திசையில் முறையே அமையும் அலகு வெக்டர்கள், i, j, k ஆகுக. r என்பது ஏதேனும் ஒரு வெக்டரானல் அதை i, j, k என்பதன் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூறமுடியும்.



படம் 20

OP என்பது r எனும் வெக்டராகுக. x O y தளத்திற்கு PR எனும் குத்துக்கோடு வரைக. R லிருந்து Ox க்கு RP_1 எனும் குத்துக் கோடுவரை.



படம் 21

$OP_1 = x$ ஆகுக
$P_1R = y$ ஆகுக
$RP = z$ ஆகுக

(x,y,z) என்பது PR இன் கார்டீசியக்குத்துக் கூறுகள் எனப்படும். [Rectangular Cartesian Coordinates].

$OP = OP_1 + P_1R + RP$ ஆனால் $OP_1 = xi$; $P_1R = yj$; $RP = zk$.
$r = OP = xi + yj + zk$

குறிப்பு : $\angle ORP = 90°$ எனக் காண்கிறோம்; அதேபோல $\angle \underline{P_1RP} = 90°$

$$OP^2 = OP_1^2 + P_1P^2$$
$$= OP_1^2 + P_1R^2 + RP^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$
$$\therefore |r| = OP$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ஆகவே

$$r = xi + yj + zk$$

என்றால்

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.19 திசைக் கோசைன் விகிதங்கள் :

$\underline{|xOP} = \alpha$, $\underline{|yOP} = \beta \underline{|zOP} = \gamma$ ஆகுக என்றால் $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ என்பவை OP எனும் வெக்டரின் திசையைத் தருவன ஆதலின், திசைக்கோசைன்கள் (Direction Cosines) எனப்படும். (d.c)எனச்சுருக்கமாகக் குறிப்போம். திசைக் கோசைன்களை l, m, n, எனவும் குறிப்பது வழக்கம்.

$r = xi + yz + zk$ என்றால்

$\cos\alpha = \dfrac{OP_1}{OP} = \dfrac{x}{r}$; இதேபோல $\cos\beta = \dfrac{y}{r}$; $\cos\gamma = \dfrac{z}{r}$

ஆகவே $a_1i + a_2j + a_3k$ எனும் வெக்டரின் திசைக்கோசைன் விகிதங்கள் முறையே

$$l = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^1 + a_2^2 + a_3^2}},\ m = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\ n = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

எனவாகின்றன

$\therefore$ $\underline{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$ அதாவது $\underline{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$.
எனவருவதைக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு : மறுதலையாக l,m,n,எனும் திசைக் கோசைன் களுடைய வெக்டர் $li+mj+nk$ என வருகிறது இதை e எனக் குறித்தால் $|e|=1$ ஆனதால் அலகு வெக்டராகும்.

திசைவிகிதங்கள் : (Direction ratios)

ஒரு கோட்டின் திசைக்கோசைன்களுடன் நேர் விகிதத் திலிருக்கும் எண்கள், கோட்டின் திசைவிகிதங்கள்எனப்படும்.

கோட்டின் திசைக்கோசைன்கள் l,m,n,ஆகுக. அப்போது (p, q, r) திசை விகிதங்களாயின்

$\frac{p}{l}=\frac{q}{m}=\frac{r}{n}$ ஆகும்

ஆகவே (Rl,Rm,Rn) என்பவை திசை விகிதங்களாகும்.

குறிப்பு: p, q, rதிசைவிகிதங்களாகுக. அதற்கேற்ற திசைக் கோசைன்கள்l,m,n ஆகுக

அப்போது $\frac{l}{p}=\frac{m}{q}=\frac{n}{r}=\frac{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

$\therefore l=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}};\ m=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},n=\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

கணக்கு 1. $a=3i-2j+k$

$b=2i-4j-3k$

$c=-i+2j+2k$ என்றால்

(i) c (ii) $a+b+c$ (iii) $2a-3b-5c$இவற்றின் அளவுகளையும் திசைக்கோசைன்களையும் காண்க.

$c=-i+2j+2k \therefore |c|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

$\therefore$ c திசையில் அலகு வெக்டர் $=-\frac{1}{3}i+\frac{2}{3}j+\frac{2}{3}k$

$\therefore$ cஇன் திசைக்கோசைன்கள் $=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

(ii) $a+b+c=(3+2-1)i+(-2-4+2)j+(1-3+2)k$
$=4i-4j+0k$

$\therefore |a+b+c|=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$

திசைக்கோசைன்கள் $=\left(\frac{4}{4\sqrt{2}},\frac{-4}{4\sqrt{2}},\frac{0}{4\sqrt{2}}\right)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad -2a &= 6i-4j+2k \\
-3b &= -6i+12j+9k \\
-5c &= 5i-10j-10k \\
\therefore 2a-3b-5c &= \overline{5i-2j+k}
\end{aligned}$$

$$\therefore |2a-3b-5c| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$$

திசைக்கோசைன்கள் $\left(\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$

கணக்கு (2) $u=2i+4j-5k; v=i+2j+3k$ என்றால் $u+v$ என்ற வெக்டருக்கு இணையான அலகு வெக்டர் யாது ?

$$u+v = 3i+6j-2k$$

$$|u+v| = \sqrt{9+36+4} = 7$$

அலகு வெக்டர் $= \frac{3}{7}i + \frac{6}{7}j - \frac{2}{7}k$

பயிற்சி

1. $A = 3i-j-4k$, $B = -2i+4j-3k$, $C = i+2j-k$ என்றால் கீழ்வருவன காண்க.

(i) $2A-B+3C$ (ii) $|A+B+C|$ (iii) $|3A-2B+4C|$ (iv) $3A-2A+4C$க்கு இணையான அலகு வெக்டர்.

2. $a = 2i-j+k$, $b = i+3j-2k$, $c = 2i+j-3k$, $d = 3i+2j+5k$, $d = pa+qb+rc$ என்றால் p,q,r இவற்றின் மதிப்புகளென்ன ?

3. கீழ்வரும் வெக்டர்களில் மூன்றாவதை முதலிரு வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூறுக. அதனால் மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக அமையும் என நிறுவுக.

(i) $a = 2i+j-3k$, $b = i-4k$, $c = 4i+3j-k$

4. கீழ்வரும் மூன்று வெக்டர்கள் ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களாக முடியும் என நிறுவுக :

$a = 3i+j-2k$, $b = i+3j+4k$, $c = 4i-2j-6k$ இந்த முக்கோணத்தின் இடைக்கோடுகளின் நீளங்களைக் கணக்கிடு:

(விடை : $\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}\sqrt{114}$; $\frac{1}{2}\sqrt{150}$)

5. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகளின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே $2i-j+k$, $i-3j-5k$, $3i-4j-4k$ என்றால் அதன்பக்க நீளங்களைக் கணக்கிடுக. (April 61 B.Sc. Ancil)

6. மூன்று புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $2i-j+k$, $i-3j-5k$ $3i-4j-4k$. முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் கண்டு, அது செங்கோணமுக்கோணம் என நிறுவுக. (M.U.)

7. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $4i+5j+6k, 5i+6j+4k$ $6i+4j+5k$ என்ற வெக்டர்களைக் குறிக்கின்றன. முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் எனக்காட்டு. (M.U.)

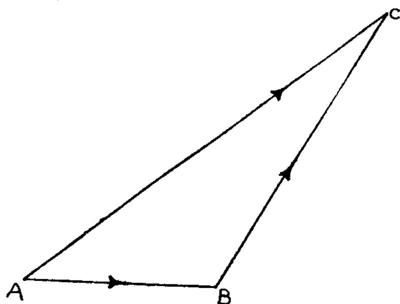
8. $a-2b+3c$; $2a+3b-4c$; $-7b+10c$ தரும்புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன என நிறுவுக (a, b, c, என்பவை அச்சுக்களில் முறையே அமையும். அலகு வெக்டர்களாகும்) (M.U.)

9. $a, b, 3a-2b$ எனும் நிலை வெக்டர்களுடைய புள்ளிகள் P,Q,R ஒரு கோடமைவன எனக்காட்டு. (M.U.)

3. இயங்குவியல் கணிதத்தில் வெக்டர் முறை பயன்படும் வகை

1·20 புள்ளியின் இடப்பெயர்ச்சி (displacement)

A என்ற நிலையில் ஒரு புள்ளி ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் இருக்கட்டும். பின்னர் அதன் நிலை C ஆகுக. அப்போது அதன் இடப்பெயர்ச்சி AC எனும் வெக்டராகும். இடையில் B என்ற நிலையிலிருந்து பின்னர் C என்ற நிலையை அடைந்ததெனக் கொள்வோம். அப்போது முதல் இடப்பெயர்ச்சி AB, பின்னது BC இரண்டும் சேர்ந்த இடப்பெயர்ச்சி AC.



படம் 22

அதாவது $AB+BC=AC$ இவ்வாறு இடப்பெயர்ச்சி வெக்டர் கூடுதல் விதிக்கடங்கியதெனக் காண்கிறோம். ஆகவே இடப்பெயர்ச்சியை வெக்டர் முறையால் ஆராயலாம்.

1.21 சார்பு இடப் பெயர்ச்சி (Relative displacement)

குறிப்பிட்ட நேரத்தில், P,Q என்பவை இரு புள்ளிகள் A,B என்பவற்றின் நிலைகளாகுக. PQ எனும் வெக்டர், Aயைச் சார்ந்த B யின் நிலையாகும். (Aயும் Bயும் இயங்குபவை)

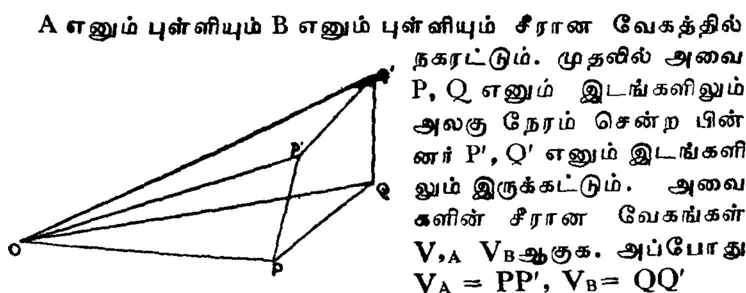
ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O வை மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ள, PQ இவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் a, b ஆகுக. அப்போது PQ = OQ−OP = b−a ஆகும். பின்னர், P′ Q′ எனும் நிலைகளில் A, B இருக்கட்டும். A ஐச் சார்ந்த Bயின் இப்போதைய நிலை P′ Q′ எனும் வெக்டராகும்.

P′Q′−PQ என்பது A ஐச் சார்ந்த B யின் இடப்பெயர்ச்சி ஆகும். Aக்கு Bயின் சார்பு இடப்பெயர்ச்சி [Relative displacement of B with respect to A] P′Q′ − PQ ஆகும்.

சீரானவேகம் (Uniform velocity) : திசை மாறுமல் சம நேரத்தில் சம இடப்பெயர்ச்சி நேரிடும்படி ஒரு புள்ளி நகர்ந்தால், அது சீரான வேகத்தில் இயங்குகிறது எனக் கூறப்படுகிறது. ஒரு அலகு நேரத்தில் (Unit Time) நேரிடும் இடப்பெயர்ச்சி அதன் சீரான வேகம் எனப்படும். ஆகவே சீரான வேகமும் வெக்டரால் குறிக்கப்படும்.

சார்பு வேகம் (Relative Velocity)

A எனும் புள்ளியும் B எனும் புள்ளியும் சீரான வேகத்தில் நகரட்டும். முதலில் அவை P, Q எனும் இடங்களிலும் அலகு நேரம் சென்ற பின்னர் P′, Q′ எனும் இடங்களிலும் இருக்கட்டும். அவைகளின் சீரான வேகங்கள் V_A, V_B ஆகுக. அப்போது $V_A = PP'$, $V_B = QQ'$



படம் 28

Bயின் சார்பு வேகம் (Aக்கு) = அலகு நேரத்தில் Qவின் சார்பு இடப்பெயர்ச்சி.

$$= P'Q' - PQ$$

Aக்கு Bயின் சார்பு வேகத்தை V_{AB} எனக் குறிப்போம். O எனும் புள்ளியை மூலப்புள்ளியாகக் கொள்ள $\overline{P'Q'} - \overline{PQ}$ என்பது A ஐச் சார்ந்த Bயின் இடப்பெயர்ச்சி ஆகும். Aக்கு Bயின் சார்பு இடப்பெயர்ச்சி (Relative displacement of B with respect to A) P′ Q′ — PQ எனும் வெக்டராகும். இதை V_{AB} எனக் குறிப்போம். இது அலகு நேரத்தில் ஏற்பட்ட சார்பு இடப்பெயர்ச்சியாதலால், சார்பு வேகம் எனப்படும்.

$$V_{AB} = P'Q' - PQ$$
$$= (OQ' - OP') - (OQ - OP)$$
$$= (OQ' - OQ) - (OP' - OP)$$
$$= QQ' - PP'$$

(i) $V_{AB} = V_B - V_A$

(ii) $U_B = U_A + U_{AB}$

இங்கு சமதள இயக்கங்களை மட்டும் கூறுவோம். கிழக்கு மேற்கு, தெற்கு, வடக்கு எனும் திசையைக் கூறுமிடத்து கிழக்கு திசையில் அலகு தூரத்தை அல்லது அலகு வேகத்தை i எனும் அலகு வெக்டராலும், அவ்வாறே வடக்கு திசையில் j எனும் அலகு வெக்டராலும் குறிப்போம்.

ஆகவே $r = a_1i + a_2j$ எனில்

$|r| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ஆகும்.

அதன் திசை கி $\tan^{-1}\frac{a_2}{a_1}$ வ ஆகும்.

[கிழக்கிலிருந்து வடக்காக உள்ள கோணம் $\tan^{-1}\frac{a_2}{a_1}$]

கணக்கு 1 : மழைத்துளிகள் விநாடிக்கு 10 அடி வேகத்தில் நேர் கீழாக விழுகிறது. மணிக்கு 15 மைல் வேகத்தில் சமதளத்தில் செல்பவனுக்கு மழைத்துளிகள் எவ்வாறு விழுவதாகக் காணப்படும்.

விநாடிக்கு

மனிதனின் வேகம் = 22 அடி → (V_A ஆகுக.)

மழையின் வேகம் = 10 அடி ↓ (V_B ஆகுக).

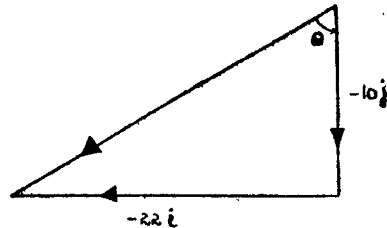
∴ மழையின் சார்பு வேகம் $= V_B - V_A = V_{AB}$

தரை வேகத்தை i அலகு வெக்டராலும், மேல் திசையில் j அலகு வெக்டரையும் கொள்ள $V_A = 22i$; $V_B = -10j$

$\therefore V_{AB} = V_B - V_A = V_B + (-V_A) = -22i - 10j$

ஆகவே மனிதனது முகம் நோக்கி $\tan^{-1}\frac{22}{10}°$ கோணத்தில், நிலைக்குத்திலிருந்து சாய்ந்து மழைத்துளிகள் விழுகின்றன.

(குறிப்பு: மனிதன் வேகம் குறையக் குறைய, சாய்வு குறைவதைக் காணலாம்.



படம் 24

கணக்கு 2: கிழக்காகவும், வடக்காகவும் செல்லும் இரு பாதைகளில் முறையே, ஒரு வண்டி மணிக்கு 16 மைல் கிழக்காகவும், மற்ருென்று 12 மைல் வடக்காகவும் செல்கின்றன. முதல் வண்டிக்குப் பின்னது எத்திசையில் என்ன வேகத்துடன் செல்வது போன்று தோன்றுகிறது ?

மணிக்கு

முதல் வண்டி A யின் வேகம் = 16 மைல் $\rightarrow (V_A)$

இரண்டாவது வண்டி Bயின் வேகம் = ,, 12 மைல் $\uparrow (V_B)$

$\therefore$ Bயின் சார்பு வேகம் $= U_B+(-U_A)$

$= 12j-16i$

$V_{AB} = 4(-4i+3j)$

$\therefore$ வேகத்தின் அளவு$(V_{AB}) = 4\times 5 = 20$மைல்

திசை $=$ மே$\tan^{-1}\frac{3}{4}$ வ.

[$-i$.4 என்பதால் கிழக்குக்கு எதிர்; அதாவது மேற்கு. இதே போல $-j$ என்ருல் தெற்கு ஆகும்.]

கணக்கு 3: வடகிழக்காக ஒருவன் செல்லும்போது காற்று வடக்கிலிருந்து வருவதாகத் தோன்றுகிறது. அதே திசையில் இரு மடங்கு வேகத்துடன் செல்லும் போது காற்று வ $\cot^{-1}2$கி ஆக வருவதாகக் காண்கிறது. காற்று எத்திசையிலிருந்து உண்மையாக வருகிறது ? அதன் வேகம் என்ன ?

மனிதன் வடகிழக்காகச் செல்வதால் அவன் வேகம் $ai+aj$ ஆகுக.

காற்றின் சார்பு வேகம் $= -xj$ (தெற்கு நோக்கி வீசுவதால்)

$\therefore$ காற்றின் உண்மை வேகம் $= ai+(a-x)j$ ......(1)

இரண்டாவதாக மனிதனின் வேகம் $= 2ai+2aj$

காற்றின்சார்பு வேகம் $= -yi-2yj$

$\therefore$ காற்றின் உண்மை வேகம் $= (2a-y)i+(2a-2y)j$ ...(2)

(1), (2) ல் i, j பிரிகவுகளைச் சமன்படுத்த,

$2a-y = a \qquad 2a-2y=a-x$

$\therefore\ y=a \qquad x=a$

$\therefore$ காற்றின் உண்மை வேகம் $= |ai| = a$

மனிதனின் முதல் வேகஅளவு $= a\sqrt{2}$

∴ காற்று (i) கிழக்காக வீசுகிறது.

(ii) மனிதனது வேகத்தில் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ பங்கு.

கணக்கு 4: A, B என்ற இயங்கும் இரண்டு பொருள்களது Cஐப் பற்றிய சார்பு வேகம் தரப்பட்டுள்ளது. A ஐப் பற்றிய Bயின் சார்பு வேகம் காண்க. (B.Sc. April 67)

Cஐப் பற்றிய Aயின் சார்பு வேகம் $= V_{CA}$

Cஐப் பற்றிய Bயின் சார்பு வேகம் $= V_{CB}$ ஆகுக.

Aஐப் பற்றிய Bயின் சார்பு வேகம் $= V_{AB}$ ஆகுக.

A, B, C இவற்றின் வேகங்கள் U_A, U_B, U_C ஆகுக.

$$\therefore V_{CA} = V_A - V_C$$
$$V_{CB} = V_B - V_C$$
$$V_{AB} = V_B - V_A$$

ஆனால் $V_B - V_A = V_{CB} - V_{CA}$

$$\because V_{AB} = V_{CB} - V_{CA}$$

கணக்கு 5: கிழக்காகச் செல்பவன் ஒருவனுக்குக் காற்று வடக்கிலிருந்து வருவது போன்று தோன்றுகிறது. இரு மடங்கு வேகத்தில் சென்றால் வடகிழக்கிலிருந்து வருவதாகத் தோன்றுகிறது. மும்மடங்கு வேகத்தில் சென்றால் $E \tan^{-1}\frac{1}{2} N$ இலிருந்து வருவதாகத் தோன்றுகிறதெனக் காட்டு. (B.Sc. April 67)

மனிதனின் வேகம்	காற்றின் தோற்ற வேகம்	காற்றின் உண்மை வேகம்
ai	$Oi - xj$	$ai - xj$
$2ai$	$-yi - yj$	$(2a-y)i - yj$

$\therefore a = 2a - y \qquad x = y$

$\therefore y = a$

$x = a$

∴ காற்றின் உண்மை வேகம் $ai - aj$

∴ மனிதனின் வேகம் $3ai$ ஆக இருக்கும் போது

காற்றின் தோற்ற வேகம் = காற்றின் உண்மை வேகம் − மனிதனின் வேகம்

$$= (ai - aj) - 3ai$$
$$= -2ai - aj$$

∴ காற்று $E \tan^{-1} \frac{1}{2}{}^\circ N$ லிருந்து வருவதாகத் தோன்றும்.

பயிற்சி

1. ஒரு படகு 10 மைல் வேகத்தில் தெற்காகச் செல்லுகிறது. இன்னொன்று 7 மைல் வேகத்தில் மேற்காகச் செல்லுகிறது. இரண்டாவது படகு முதற்படகுக்கு எந்தத் திசையில் என்ன சார்பு வேகத்தில் செல்கிறது.

2. ஒரு ஆற்றின் வேகம் $i-3j$ எனும் வெக்டராலும் ஆற்றைச் சார்ந்து தோணியின் வேகம் $3i+4j$ ஆகவும், ஆனல் தரையைச் சார்ந்த தோணியின் வேகம் என்ன ?[i, j என்பவை கிழக்கு, வடக்குத் திசையில் முறையே அலகு வெக்டர்கள்.]

3. மழைத்துளிகள் 67 செ.மீ. வினடிக்கு எனவிழுகின்றன. ஒரு வண்டி மணிக்கு 48 கி.மீ. வேகத்தில் செல்கிறது. மழைத்துளிகள் வண்டியிலிருப்பவர்க்கு எத் திசையிலிருந்து என்ன வேகத்தில் வருவதாகக் காணப்படும்.

4. மணிக்கு 5 மைல் வேகத்தில் செல்பவனுக்கு செங்குத்திலிருந்து $60°$ சாய்வாகவும், மணிக்கு 8 மைல் வேகத்திலும் மழைத்துளிகள் விழுவதாகக் காணப்படுகிறது என்ருல் உண்மையில் மழைத்துளிகள் எவ்வாறு விழுகின்றன ?

6. கிழக்காகச் செல்பவனுக்கு காற்று வட கிழக்கிலிருந்து வருவதாகக் காட்சியளிக்கிறது. இருமடங்கு வேகத்தில் அவன் சென்ருல் கி $\cot^{-1}2$வ திசையிலிருந்து வருவதுபோன்று தோன்றுகிறது. உண்மையில் காற்று தென் திசை நோக்கி வீசுகிறதெனக் காண்க.

2. வெக்டர் பெருக்கற் பலன்கள்

வெக்டர் எண் என்பது திசையையும் அளவையும் ஒருங்கே கொண்டது எனக் கூறினோம். இரண்டு வெக்டர் கூடுதல் என்ன என்பதையும், ஒரு வெக்டரை வெற்று எண்ணால் பெருக்கவரும் பெருக்கற்பலன் என்ன என்பதையும் கூறினோம். இதுவரை வெக்டர் எண்கள், கூட்டல், கழித்தல் இவை பொருத்தவரை சாதாரண ஆல்ஜிப்ரா விதிகளுக்கு அடங்கிய தெனவும் கண்டோம். இப்போது வெக்டர்களின் 'பெருக்கற் பலன்' எனும் புதுவித வெக்டர்ச் சேர்க்கையைக் கூறுவோம்.

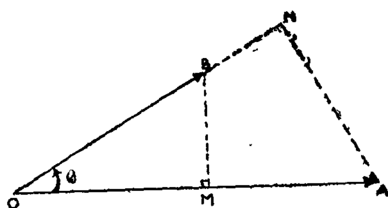
2·1 இரு வெக்டர்களின் 'புள்ளிப்பெருக்கற்பலன்'

(Dot product of two vectors.)

வரையறை : (Definition)

a,**b** இருவெக்டர்களாகுக. அவையிடையேயுள்ள கோணம் θ ஆகுக என்றால் **a**.**b** எனும் வெக்டர்களின் புள்ளிப் பெருக் கற்பலன் $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \mathrm{Cos}\theta$ எனப்படும். புள்ளிப் பெருக்கற் பலன் **a**.**b** எனும்கூறியீட்டால் தரப்படும். ஆகவே $\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\mathrm{Cos}\theta$ வரையறையிலிருந்து a.b. எனும் பெருக்கற் பலன் திசை யிலிஎண் (வெற்றுஎண்) (அதாவது திசையிலி) எனத் தெரிய வருகிறது. ஆகவே இந்தப் பெருக்கற் பலனை வெற்றெண் பெருக்கற்பலன் (Scalar product) அல்லது திசையிலிப் பெருக் கற் பலன் எனவும் கூறுவர்.

2.2 படம் வழி விளக்கம் :



$OA = a$ ஆகுக $\therefore OA = |a|$
$OB = b$ ஆகுக $\therefore OB = |b|$
$AOB = \theta$ ஆகுக
OAக்கு BM எனும் குத்துக் கோடுவரைக

படம் 25

$\therefore OM = OB \cos\theta = |b| \cos\theta$

$\therefore a \cdot b = |a|\ |b| \cos\theta$

$\therefore a \cdot b = OA.OM$

$\therefore$ a.b என்றால் aயின் மேல் bஇன் விழலைப்போல |a| மடங்கு எனப்பொருளாம்.

குறிப்பு 1 : OBக்கு AN எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

$\therefore ON = OA \cos\theta = |a| \cos\theta$

$\therefore b \cdot a = |a|\ |b| \cos\theta$

$= OB.ON$.

ஆனால் $OA.OM = OB.ON$ ($\therefore$ BMAN ஒரு வட்ட நாற்கரம்)

$\therefore a \cdot b = b \cdot a$ எனக்காண்கிறோம்.

இவ்வாறு சாதாரண ஆல்ஜிப்ராவில் $xy = yx$ என்பது போன்று புள்ளிப் பெருக்கலும் மாற்றுவிதிக்கு (Commutative Law) அடங்கியது எனக்காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : இதை மற்றொரு வழியிலும் காணலாம் $\angle AOB = \theta$ என்றால் $\angle BOA = -\theta$ ஆகும்

$a \cdot b = |b|\ |a| \cos(-\theta)$

$= |a|\ |b| \cos\theta$

$\therefore a \cdot b = b \cdot a$.

குறிப்பு 3 : a வெக்டர் bவெக்டருக்குக் குத்தானால் $\theta = 90°$ ஆனால் $\cos 90° = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$

$\therefore a \cdot b = |a|\ |b| \cos 90° = 0$

மறுதலையாக (a,யும் bயும் சுழி வெக்டரல்லாதனவாயின்,)$a \cdot b = 0$ என்றால் அவை ஒன்றற்கொன்று குத்தானவை எனப் பொருளாம். மீண்டும் கூற : (i) இருவெக்டர்கள் ஒன்றற்

கொன்று குத்தானுல் அவற்றின் புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் பூச்சியமாகும் (ii) புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் பூச்சியமானுல், வெக்டர்களில் ஒன்று சுழி வெக்டராகும் அல்லது அவை குத்தாக அமையும்.

குறிப்பு 4: $a \cdot a = |a|^2$ (ஏனெனில் $\theta = 0 \therefore \cos\theta = 1$)

குறிப்பு 5: (i) $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$

(ii) $(-a)\cdot b = (-a\cdot b)$

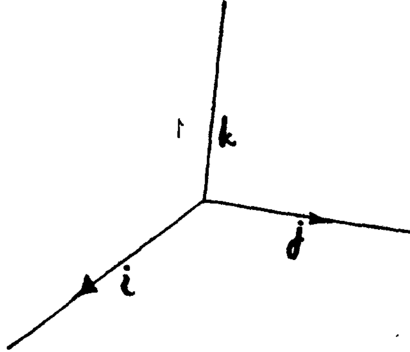
(iii) $\alpha a\cdot\beta b = \alpha\beta\,(a\cdot b)$

குறிப்பு 6: i, j, k என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள அலகு வெக்டர்கள்.

அப்போது $i\cdot j = 0 \quad i\cdot i = 1$

$j\cdot k = 0 \quad j\cdot j = 1$

$k\cdot i = 0 \quad k\cdot k = 1$



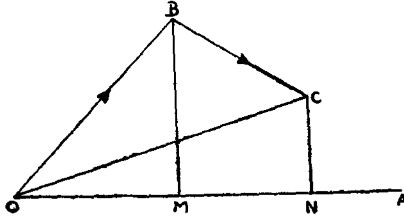
படம் 26

இதைப் பட்டியலில் கீழ்வருமாறு காட்டலாம்.

இதைப்பட்டியலில் கீழ்வருமாறு காட்டலாம் :

	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

2·3 $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ என நிறுவ :



படம் 27

(நிரூபிக்காமல் இந்த விதிபொருந்தும் எனநாம் கொள்ள முடியாது)

$OA = a$

$OB = b$

$BC = c$ ஆகுக

$$b+c = OB+BC = OC$$

B,Cலிருந்து OAக்கு BM, CN குத்துக் கோடுகள் வரைக ∴ OAயின் மேல் OBயின் வீழல் OM, BCயின் வீழல் MN, OCயின் வீழல் ON

$$\begin{aligned} \therefore a\cdot(b+c) = a.OC &= (OA)\ (ON) \\ &= (OA)\ (OM+MN) \\ &= (OA)\ (OM) + (OA)\ (MN) \\ &= a\cdot b + a\cdot c \end{aligned}$$

இவ்வாறு OA, OB, BCஎனும் a,b,c வெக்டர்கள் ஒரே சமதள வெக்டராயினும், அல்லவாயினும் $a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c$ என வருகிறது.

குறிப்பு 1 $a\cdot(b+c) = (b+c)\cdot a$ ஆனதால் இரண்டும் $a\cdot b+a\cdot c$க்குச் சமம்.

குறிப்பு 2 $(a+b)\cdot(c+d)$

$$\begin{aligned} &= (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\ &= a\cdot c + b\cdot c + a\cdot d + b\cdot d \end{aligned}$$

ஆகவே புள்ளிப் பெருக்கலும், சாதாரண ஆல்ஜீப்ராவில் வரும் பெருக்கலைப் போலவே அமைவதால், வெக்டர் எண்களின் புள்ளிப்பெருக்கற்பலன் காண்பது எளிதாகிறது.

குறிப்பு 3 $a = a_1i+a_2j+a_3k$

$b = b_1i+b_2j+b_3k$ ஆனால்

$$\begin{aligned} a\cdot b = &\ a_1b_1i\cdot i+a_1b_2i\cdot j+a_1b_3i\cdot k \\ &+ a_2b_1j\cdot i+a_2b_2j\cdot j+a_2b_3j\cdot k \\ &+ a_3b_1k\cdot i+a_3b_2k\cdot j+a_3b_3k\cdot k \end{aligned}$$

$$\therefore a\cdot b = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

(மற்ற உறுப்புக்கள் பூச்சியமாகும்)

கணக்கு 1 முக்கோணம் ABCயில் வழக்கமான குறியீட்டு முறையில் $a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$ என நிறுவுக:

$$BC = AC - AB$$

$$BC \cdot BC = (AC-AB)\cdot(AC-AB)$$

$$\therefore BC^2 = AC^2+AB^2-2AC\cdot AB$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

கணக்கு 2 : ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துயரக்கோடுகள், ஒரு புள்ளி வழிக்கோடுகள் என நிறுவுக.

நிரூபணம் : முக்கோணம் ABC இல், A இல் இருந்து BCக்கும், B இல் இருந்து CAக்கும் முறையே குத்துயரக் கோடுகள் வரைக. அவை H என்ற புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

$$AH \perp BC$$

$$BH \perp CA$$

H ஐ மூலப்புள்ளியாகக் கொள்ள, A, B, C யின் நிலை வெக்டர்கள் முறையே a, b, c எனக் கொள்வோம்.

$HA \perp BC \quad \therefore \quad a\cdot(c-b)=0$

$\therefore \quad a\cdot c - a\cdot b = 0 \ldots\ldots\ldots(1)$

$HB \perp CA \quad \therefore \quad b\cdot(a-c)=0$

$b\cdot a - b\cdot c = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1), (2) இவற்றைக் கூட்ட

$a\cdot c - b\cdot c = 0 \qquad (\because a\cdot b = b\cdot a)$

$(a-b)\cdot c = 0 \qquad \therefore AB \perp HC$

$\therefore$ C யில் இருந்து AB க்கு வரையும் குத்துயரக் கோடும், H வழியே செல்கிறது.

கணக்கு 3: ஒரு நான் முகியில் இரு ஜோடி எதிர் விளிம்புகள் ஒன்றற்கொன்று குத்தாயின் மற்ற ஜோடி எதிர் விளிம்புகளும் குத்தாகும் என நிறுவுக :

நான்முகி ABCH ஆகுக. Hஐ மூலப்புள்ளியாகக் கொள்ள, A,B,Cயின் நிலை வெக்டர்கள் a,b,c ஆகுக

HA⊥ʳ BC HB⊥ʳ CA எனத்தரப்பட்டுள்ளது

$\therefore \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = 0$

$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c}) = 0$

$\therefore \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = 0$

$\therefore$ HC ⊥ʳ AB

(கணக்கு 2ம் கணக்கு 3ம் ஒரு போன்று நிருபணம் உடையதைக்காணவும். ABC என்றதளத்தில்Hஅமைந்தால் அதுகுத்து மையம். தளத்தில் இல்லாவிடில் அது மேற்கூறிய நான்முகியாகும்.)

கணக்கு 4 : முக்கோணம் ABC யில் S சுற்றுவட்ட மையமாகவும் H குத்துமையமாகவும் ஆனால்,
$SH^2 = R^2\,(1-8\cos A\cos B\cos C)$ எனக்காட்டுக.

S ஐ மூலப்புள்ளியாகக் கொள்ள, A, B, C யின் நிலைவெக்டர்கள் a, b, c ஆகுக.

$\therefore |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$

H⊥இன் நிலை வெக்டர் $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$

$$\begin{aligned}\therefore SH^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2\\ &= (\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\\ &= (R^2+R^2+R^2+2R^2\textstyle\sum\cos 2C)\\ &= R^2(3+2\cos 2A+2\cos 2B+2\cos 2C)\\ &= R^2[3+2(-1-4\cos A\cos B\cos C)]\\ &= R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)\end{aligned}$$

கணக்கு 5 : OA, OB எனும் இருகோடுகள், ON எனும் கோட்டிற்குக் குத்தானல் AOB எனும் தளத்தில் அமையும் எல்லாக் கோடுகளும் ON க்குக் குத்தாகும் என நிறுவுக.

OA, OB, எனும் கோடுகளில் a,b எனும் வெக்டர்களைக் கொள்க. ON எனும் கோட்டில் n எனும் வெக்டரைக் கொள்க. OA⊥ʳ ON. $\therefore \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0$; OB ⊥ʳON $\therefore \mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0$; AOB என்ற தளத்தில் உள்ள ஏதேனும் கோட்டில் c வெக்டராகுக. அப்போது $\mathbf{c} = p\mathbf{a}+q\mathbf{b}$ எனக் கூற முடியும். (19 பக்கம் பார்க்க)

$\therefore \mathbf{n}\cdot\mathbf{c} = p\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} + q\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}$
$= 0\times0$
$= 0$

$\therefore \mathbf{n}\perp^r \mathbf{c}$; $\therefore$ O A B தளத்தில் உள்ள கோடுகள் யாவும் ON க்குக் குத்தாகும்.

கணக்கு 6 : $\mathbf{u} = 2i+2j-k$
$\mathbf{v} = 6i-3j+2k$
என்றால் அவற்றிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}|\ |\mathbf{v}| \cos\theta$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 12-6-2 = 4$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{21} = 0.1905 \ \therefore \theta = 79^\circ$ (திருத்தமாக)

கணக்கு 7 : $a = 3i-2j+k$
$b = i-3j+5k$
$c = 2i+j-4k$ எனும் மூன்று வெக்டர் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எனக் காட்டு.

$a-b = c$ என வருவதால் மூன்றும் சமதள வெக்டர்களாகும். ஆகவே அவை முக்கோணத்தின் பக்கங்களாம்.

$a\cdot b = 3+6+5 = 14$

$b\cdot c = 2-3-20 = -21$

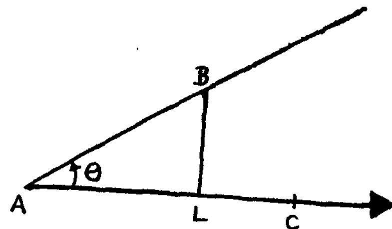
$c\cdot a = 6-2-4 = 0$

$C\perp^r a$ ஆகவே முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமாகும்.

விசை செய்யும் வேலையின் அளவு : (Work done by a force)

ஒரு விசை ஒரு துணிக்கையை (Particle) தாக்கி அதை இடம் பெயரச் செய்தால், விசை வேலை செய்துள்ளது என்கிறோம். விசையின் திசையில் துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சியை, விசையின் அளவால் பெருக்கவரும் பலன் விசை செய்த வேலை எனக் கணக்கிடப்படும். துணிக்கை விசையின் திசையிலேயே இடம் பெயர வேண்டும் என்பதில்லை.

A என்ற இடத்திலிருந்து B எனும் துணிக்கை நகரட்டும். விசையின் திசை AC ஆகுக. AC க்கு BL எனும் குத்துக் கோடு வரைக. துணிக்கையின் இடப்பெயர்ச்சி AB ஆகும். ஆனால் AC என்ற திசையில் அதன் பிரிவு AL ஆகும். $\angle CAB = \theta$ ஆனால்,



படம் 28

$AL = AB \cos\theta$

F எனும் விசை செய்த வேலை $= F \cdot AL$

$= F \cdot AB \cos\theta$

வேலை செய்த அளவு $= F \cdot AB$, $AB = r$ என்றால்

F எனும் வேலை செய்த அளவு $= F \cdot r = r \cdot F$

கணக்கு 8 : சீரான விசைகள் $2i-5j+6k$, $-i+2j-k$, $2i+7j$ ஒரு துணிக்கையைத் தாக்க அது $4i-5j-2k$ எனும் நிலை வெக்டர் உடைய புள்ளியிலிருந்து $6i-j-3k$ எனும் நிலை வெக்டர் உள்ளபுள்ளிக்கு இடம் பெயருகிறது என்றால் நகர்த்த நேரிடும் வேலை என்ன ?

$r = (6i-j-3k)-(4i-5j-2k)$

$\therefore r = (2i+4j-k)$

மொத்த விசை $= (2i-5j+6k)$

$+ (-i+2j-k)$

$+ (2i+7j \quad)$

$F = (3i+4j+5k)$

$\therefore r \cdot F = (2i+4j-k) \cdot (3i+4j+5k)$

$= 6+16-5$

வேலை அளவு $= 17$ அலகுகள்

பயிற்சி

1. மதிப்பு காண்க.

(i) $j \cdot (3i+3k)$ (ii) $(2i-3j) \cdot (5i+4j)$

(iii) $(2i-j+3k) \cdot (3i+2j-k)$

2. $u = i+3j-2k$; $v = 4i-2j+4k$ என்றால் (i) $u \cdot v$ (ii) $(2u+v) \cdot (u-2v)$ இவற்றின் மதிப்புக்களைக் காண்க.

3. கீழ் வரும் வெக்டர்களிடையே உள்ள கோணங்களைக் காண்க. (i) $a = 3i+2j-6k$ $b = 4i-3j+k$

(ii) $c = 4i-2j+4k$ $d = 3i-6j-2k$

4. $u = ai-2j+k$

$v = 2ai+aj-4k$ $u \perp^r v$ என்றால் a இன் மதிப்பு என்ன?

5. ஒரு இணைகரத்தின் இருமூலைக்கோடுகள் $u = 3i+6j-2k$ $v = 4i-j+3k$ எனும் இரு வெக்டர்களாகும். இணைகரம் ஒரு சாய்சதுரம் என நிறுவுக. அதன் பக்கங்களையும் கோணங்களையும் கணக்கிடுக.

6. $i+2j+2k$ என்ற வெக்டரின் மேல் $2i-3j+6k$ என்ற வெக்டரின் வீழலைக் கணக்கிடு.

7. A $(2,3,-1)$; B $(-2,-4,3)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மேல் $4i-3j+k$ எனும் வெக்டரின் வீழல் என்ன ?

8. ஒரு கனசதுரத்தின் இரு மூலைக் கோடுகளிடையே யுள்ள குறுங்கோணத்தைக் கணக்கிடு.

9. F_1+F_2; F_1-F_2 எனும் விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று குத்தானால் புள்ளிப் பெருக்கற் பலன் வழி அவை அளவில் சமமென நிறுவுக.

10. ஒரு இணைகரத்தின் மூலைக்கோடுகள் சம நீளமுள்ளவையானால் இணைகரம், செவ்வகமாகும் எனக்காட்டு.

11. ஒரு சாய்சதுரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை முறையாகச் சேர்க்க செவ்வகம் ஆகும் எனக்ககட்டு.

12. ABCD ஒரு இணைகரமானால் $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$ எனக்காட்டு.

13. ஒரு அரை வட்டத்தில், ஒரு புள்ளியில் விட்டம் தாங்கும் கோணம் செங்கோணமென வெக்டர் முறையில் நிறுவுக.

14. A B C D ஏதேனும் ஒரு நாற்கரம். AC, BD யின் நடுப் புள்ளிகள் முறையே P,Q என்றால் $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2$ எனக்காண்க.

15. விசை $F=4i-3j+2k$ ஒரு துணிக்கையை $(3,2,1)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $(2,-1,4)$ எனும் புள்ளிக்கு நேர்க் கோட்டில் நகர்த்துகிறது. அது செய்த வேலை என்ன ?

16. விசைகள் $3i-7j+2k$; $-i+5j-4k$; $9i-3j+6k$ $6i+3j-3k$ இவை ஒருங்கே ஒரு புள்ளியைத் தாக்க அது $3i-7j+3k$ எனும் நிலையிலிருந்து $2i+9j-k$ எனும் நிலைக்குப் பெயருகிறது. விசைகள் செய்த மொத்த வேலை என்ன ?

17. விசைகள் $4i+3j-7k$; $5i+j+4k$; $3i+6j-2k$ இவைகள் ஒரு புள்ளியை $3i+6j-2k$ எனும் நிலை வெக்டருடைய இடத்திலிருந்து $2i-j-3k$ எனும் நிலைவெக்டருடைய இடத்துக்கு நேர்க் கோட்டில் நகர்த்தினால், விசைகள் செய்த மொத்த வேலை என்ன ?

18. $a = i+2j-k$; $b = i+j+3k$; $c = 7i-4j-k$ என்றால், a, b, c, எனும் வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று குத்தாக அமையும் வெக்டர்கள் என நிறுவுக.

19. $i+2j+3k$; $pi+qk$; $i+pj+rk$ இவைஒன்றுக்கொன்று குத்துவெக்டர்களானால் p, q, r இன் மதிப்புக்களைக் கணக்கிடு.

20. $(2i-2j+k)/3$, $(i+2j+2k)/3$, $(2i+j-2k)$ 3 என்பவை ஒன்றுக்கொன்று குத்தான அலகு வெக்டர்கள் எனக் காட்டு.

2·4 இருவெக்டர்களின் "வெக்டர் பெருக்கற்பலன்" (Vector product of two vectors)

a, b இரு வெக்டர்களாகுக. அவற்றின் 'வெக்டர் பெருக்கற் பலன்' என்றால், என்ன என்பதை விளக்குவோம். $a \times b$ எனும் குறியீட்டால் வெக்டர் பெருக்கற் பலன் குறிக்கப்படும். [$a \wedge b$ என்று ஆங்கில நூல்களில் குறிக்கப் பெறும். $a \times b$ என அமெரிக்கர்கள் குறிக்கின்றனர்.]

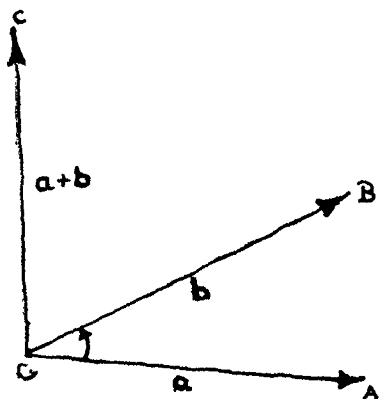
வெக்டர் பெருக்கற்பலனின் விளக்கம்:

$a \times b$ என்பது வெக்டராகும்.

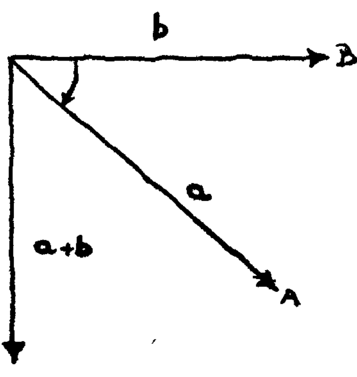
(i) அதன் திசை a, b இரண்டிற்கும் குத்தாக உள்ள திசையாகும்.

(ii) திசையின் போக்கு, aயை bயுடன் சேர்க்கும்படி சுழற்றும் போது வலக்கைத் திருகின் முனை செல்லும் திசையாகும்.

(iii) அதன் அளவு $|a||b| \sin\theta$ ஆகும்.
θ என்பது வெக்டர் b, வெக்டர் aயுடன் ஏற்படுத்தும் கோணமாகும்.



படம் 29 (a)



படம் 29 (b)

படம் (*a*) இல் $OA=a$ $OB=b$ $\angle AOB = \theta$
$|OC| = |a||b| \sin\theta$ $OC = a \times b$

படம் (b) யில் $b \times a$ காட்டப்பட்டுள்ளது. மீண்டும் கூற $a \times b$ என்பது a, b என்ற இரு வெக்டருக்கும் வலக்கைத் திருகுப் போக்கைப் பின்பற்றிக் குத்தாக அமையும் வெக்டராகும். அதன் அளவு $|a||b| \sin \theta$ ஆகும். [a, b இடைக்கோணம் θ]

ஆகவே a, bஇரு வெக்டருக்கும் குத்தாக மேற்கூறிய திசையில் உள்ள அலகுவெக்டர் (unit vector) n என்றால் $a \times b = |a||b| \sin \theta \, n$ ஆகும்.

குறிப்பு 1: படம் (b)யிலிருந்து $b \times a$ எனும் வெக்டர் அளவில் $a \times b$ எனும் வெக்டருக்குச் சமம் என்பதையும் திசையில் எதிர் என்பதையும் காண்கின்றோம். $\therefore \quad a \times b = -(b \times a)$

சாதாரண எண் பெருக்கற்கலனிலும், புள்ளிப் பெருக்கற்பலனிலும் மாற்றுவிதி பொருந்துவது போல் இங்கு பொருந்துவது இல்லை என்பது கவனிக்கத்தக்கது.

குறிப்பு 2: a,b எனும் இரு வெக்டர்களும் இணையானால் அவற்றிடையே உள்ள கோணம் 0 ஆகும். $\therefore \quad \sin\theta = \sin 0° = 0$

$$\therefore \; a \times b = O$$

ஆகவே இணைவெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கற் பலன் பூச்சியமாகும்.

மறுதலையாக $a \times b = O$ என்றால் a, b எனும் வெக்டர்கள் (சுழி வெக்டர்கள் அல்லாதன) இணை வெக்டர்களாகும்.

குறிப்பு 3: i, j, k வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கற் பலன்கள்.

$$i \times i = j \times j = k \times k = O$$

$$i \times j = k \qquad j \times i = -k$$

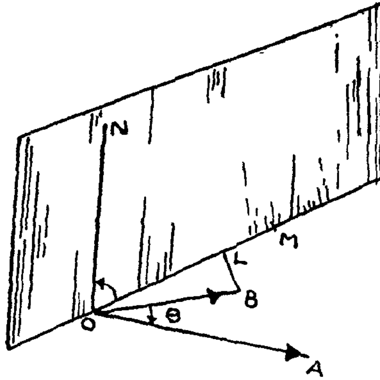
$$j \times k = i \qquad k \times j = -i$$

$$k \times i = j \qquad i \times k = -j$$

பட்டியலில் இதனைக் காட்டுவோம்.

	i	j	k
i	O	k	−j
j	−k	O	i
k	j	−i	O

2·5 $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$ என நிறுவ.



படம் 30

$OA = a$ ஆகுக.
$OB = b$ ஆகுக.
$\angle AOB = \theta$ ஆகுக.

a, b என்ற இரு வெக்டர்களுக்கும் குத்தாக உள்ள சமதளம் π ஆகுக. இத்தளத்தில் OBஇன் வீழல் OL ஆகுக. அப்போது

$OL = OB\ Cos(90-\theta)$
$= OB\ \sin\theta$
$= |b|\ Sin\theta$

OL இன் மேல் nஎனும் புள்ளியை $OM = |a|OL$ என இருக்கும்படிக்கொள்க. அப்போது $OM = |a|\ |b|\ \sin\theta$. (b, aக்கு இடஞ்சுழியாக இருந்தால்) OM ஐ இடஞ்சுழியாக π எனும் தளத்தில் 90°க்கு சுழற்றுக. அதன் நிலை ON ஆகுக. அப்போது ON எனும் கோட்டுத்துண்டு,

(i) OA, OB இரண்டிற்கும் குத்தாக அமைந்துள்ளது.

(ii) OA ஐ OBக்கு சுழற்றினுல் இடஞ்சுழித்திருகு செல்லும் திசையில் ON உள்ளது.

(iii) ON இன் நீளம் $= OA\cdot OB\ Sin\ \theta = |a|\ |b|Sin\ \theta$

$\therefore ON = a\times b$ (ON எனும்வெக்டர் $a\times b$எனும் வெக்டரைத் தருகிறது. ஆகவே வெக்டர் பெருக்கற்பலனை அடைய வீழல், (வெற்று எண்) பெருக்கல், சுழற்றல் எனும் மூன்று செயல்களை அடுத்தடுத்துச் செய்கிருேம். இவற்றை P, M, R (Project Multiply, Rotate) எனக்குறித்தால் $P(b+c) = Pb+Pc$

$$M(b+c) = Mb+Mc$$
$$R(b+c) = Rb+Rc$$

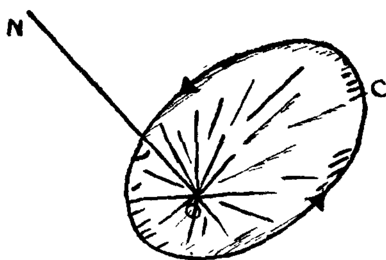
ஒவ்வொன்றும் பரவு விதிக்கு உட்பட்டவை.

$$\therefore a\times(b+c) = RMP\ (b+c)$$
$$= RMP\ b + RMPc$$
$$\therefore a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

இதற்கு மாற்று நிரூபணம் பிறகு தருவோம்.

2·7 வெக்டர் பரப்பு சமதளத்தில் அமைந்த ஒரு வளை வரை சூழ்ந்த பரப்பை வெக்டரால் குறிக்க முடியும்.

C எனும் வரை, A எனும் பரப்பை அடைக்கிறது. இந் தத்தளத்திற்குக் குத்தாக ON எனும் கோட்டைக் கொள்க. பரப்பு வரையின் மேல் இடமாக வர வலக்கைத் திருகு செல்லும் திசையில் ON இன் திசையைக்கொள்ளவும். ON இன் நீளம் பரப்பின் அளவாகுக. அப்போது பரப்பை ON எனும் வெக்டரால் குறிக்கிறோம்.

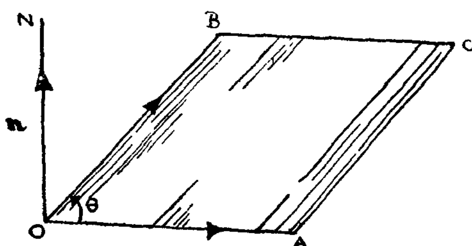


படம் 31

A = ON; அல்லது ON திசையில் n என்பது அலகு வெக்டராகுக. அப்போது பரப்பு = An (A என்பது பரப்பின் அளவு) எனக் குறிக்கப்படும்.

2·8 a×b என்பதன் வரை கணித விளக்கம் :

(Geometrical meaning of **a**×**b**)



OA = a ஆகுக

OB = b ஆகுக

படம் 32

OA, OB இவற்றை அடுத்தபக்கமாகவுடைய OACB எனும் இணை கரம் வரைக. $\angle AOB = \theta$ என்றால்

$$\square OACB \text{ இன் பரப்பு} = (OA)\,(OB)\sin\theta$$
$$= |\mathbf{a}|\;|\mathbf{b}|\sin\theta$$

(வலக்கைத் திருகு முறைப்படி) இணை கரத்தளத்திற்குக் குத்தாக உள்ள கோட்டில் $ON = |\mathbf{a}|\;|\mathbf{b}|\sin\theta$ கொள்க.

அப்போது $ON = a \times b$

$a \times b$ என்பது இணைகரத்தின் வெக்டர் பரப்பைக் கூறுகிறது.

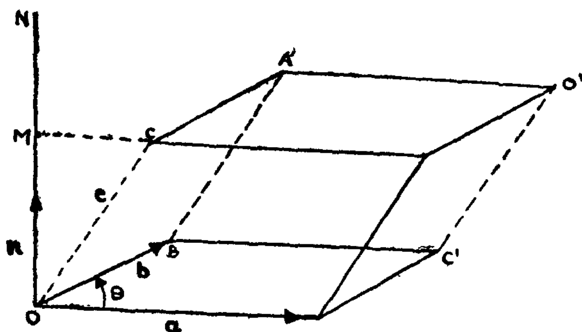
ON எனும் கோட்டில் n அலகுவெக்டரானால், $a \times b = (\text{பரப்பு})n = |a|\ |b| \sin\theta\ n$ ஆகும்.

2·9 மூன்று வெக்டர்களின் பெருக்கற்பலன் :

a, b, c என்பவை மூன்று வெக்டர்களாகுக. ஏதேனும் இரண்டு வெக்டர்களின், வெக்டர் பெருக்கற்பலன் ஒரு வெக்டரைத்தரும். $a \times b$ என்பது வெக்டர். $(a \times b)$ என்ற வெக்டரும் வெக்டர் cயும் (I) புள்ளிப்பெருக்கற்பலனையும் (ii) வெக்டர் பெருக்கற்பலனையும் தரும். 'அதாவது (i) $(a \times b) \cdot c$ எனும் ஒரு பெருக்கற்பலன். இது திசையிலாஎண் ஆனதால் இதை அளவை முக்கைப்பெருக்கற்பலன் (Scalar triple product) எனக் கூறுகிறோம். (ii) $(a \times b) \times c$ வெக்டரானதால், வெக்டர் முக்கைப் பெருக்கற்பலன் (vector triple product) என அழைக்கப்பெறும்.

[$(a \cdot b)$ திசையிலாஎண் ஆனதால் $(a \cdot b) \cdot c$ என்றோ $(a \cdot b) \times c$ என்றோ கூறுவதில் பொருளில்லை $(a \cdot b)\, c$ எனக்கூறலாம். $a \cdot b \times c$ என்றால் $a \cdot (b \times c)$ எனவே பொருளாகும்.)]

2·10 அளவை முப்பெருக்கியின் படவிளக்கம் :



படம் 33

$OA = a$ ஆகுக

$OB = b$ ஆகுக

$OC = c$ ஆகுக

OA, OB, OC இவற்றை விளிம்புகளாகவுள்ள இணைகரத் திண்மம் (Parallelopiped) வரைக. இதன் அடிப்பக்கம் OAC'B

எனும் இணைகரமாகுக. ON, இப்பக்கத்திற்குக் குத்துக் கோடாககு. ON திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர் n ஆகுக. ON க்கு C யிலிந்து CM எனும் குத்துக்கோடு வரைக.

அப்போது OM = இணைக்கரத்திண்மத்தின் உயரம்.

ஆனல் OM என்பது n எனும் அலகு வெக்டரின்மேல் OCயின் வீழலாகும்

$\therefore$ OM = $\mathbf{c \cdot n}$

அடிப்பக்கத்தின் பரப்பு = $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin\theta$

இணைகரத்திண்மத்தின்கொள்ளளவு = அடிப்பக்கம்பரப்பு $\times$ உயரம்

$= (|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin\theta)\ (\mathbf{n \cdot c})$

$= |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin\theta\ \mathbf{n \cdot c}$

$= \mathbf{a \times b \cdot c}$

இவ்வாறு $\mathbf{a \times b \cdot c}$ எனும் அளவை முப்பெருக்கி a,b,c என்பனவற்றைப் பக்கமாகவுடைய இணைகரத்திண்மத்தின் கொள்ளளவைத் தருகிறது.

2.11 குறிப்பு 1: OBA'Cஐ அடிப்பக்கமாகக் கொண்டால் இதே கொள்ளளவு $\mathbf{b \times c \cdot a}$ எனவருவதைக் காணலாம்.

$\therefore \mathbf{a \times b \cdot c} = \mathbf{b \times c \cdot a}$

இதே போல $\mathbf{b \times c \cdot a} = \mathbf{c \times a \cdot b}$

$\therefore \mathbf{a \times b \cdot c} = \mathbf{b \times c \cdot a} = \mathbf{c \times a \cdot b}$

[வட்ட சுழற்சி முறையில் (cyclic change) a,b,cயின் வரிசையை மாற்றவரும் பெருக்கற்பலன் சமம் எனவருகிறது.]

2.12 குறிப்பு 2: $(\mathbf{b \times c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b \times c})$

(புள்ளிப்பெருக்கல் மாற்று விதிக்கு அடங்கியது ஆதலால்)
ஆனல் $\mathbf{a \times b \cdot c} = \mathbf{b \times c \cdot a}$ எனவும் கண்டோம்.

$\therefore \mathbf{a \times b \cdot c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b \times c})$

ஆகவே அளவை முப்பெருக்கியின் பலன் காண்பதில் புள்ளியையும் பெருக்கற்குறியையும் ஒன்றற்கொன்று மாற்றுவதால் பெருக்கற்பலன் மாறுவதில்லை. ஆகவே $(\mathbf{a \times b \cdot c})$ என்பதை [abc] எனக்குறிக்கப்டுகிறது. ஏனெனில் புள்ளியையும் பெருக்கற்குறியையும் இடையில் எங்கு வேண்டுமெனினும் எழுதலாம் நாமும் அளவை முப்பெருக்கை எழுத இக்குறியீட்டையும் கையாளுவோம்.

குறிப்பு 3: [abc] என்பது இணைகரத்திண்மத்தின் கொள்ளளவைத்தருவதால், அதற்கு 'பெட்டிப் பெருக்கற்பலன் (Box product) எனவும் பெயருள்ளது.

குறிப்பு 4: [abc]=0 என்றால் இவை விளிம்பாகவுடைய இணைகரத்திண்மத்தின் கொள்ளளவு = 0 என வருகிறது. இணைகரத்திண்மத்தின் உயரம் =0; அதாவது a,b,c, என்பவை சமதள வெக்டராகும். இதைவேறுவகையாலும் அறியலாம்.

$a\times b\cdot c = 0$ என்றால் வெக்டர் $(a\times b)$யும், cயும் குத்தாகும். ஆனால் a,bஎனும் வெக்டர்களும் $a\times b$ வெக்டருக்குகுத்தாகும். ஆனதால் cஎனும் வெக்டரும் a,b வெக்டர்கள் தரும் தளத்தில் அமைகிறது. குறிப்பாக; (i) $a\times b\cdot a = 0$ (அல்லது) $a\times a\cdot b = 0$ (ii) மூன்று வெக்டர்களுள் இரண்டு வெக்டர்கள் ஒன்றற்கொன்று இணையானல் அவற்றின் அளவைமுப்பெருக்கற்பலன் பூச்சியமாகும்.

குறிப்பு 5: $\alpha a, \beta b\cdot \gamma c$ என்பவற்றின் அளவைமுப்பெருக்கற்பலன் $= \alpha a\times \beta b\cdot \gamma c = \alpha\beta\gamma\,[abc]$

குறிப்பு 6: i, j, k என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தாகவுள்ள அலகு வெக்டர்களாயின்

$[ijk] = [jki] = [kij] = 1$

$[ikj] = [jik] = [kji] = -1$ என வருகிறது.

2.13 $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$ என நிறுவ :

இருவெக்டர்களின் புள்ளிப்பெருக்கல் விதிகளையும், அளவை முப்பெருக்கற்பலன் கருத்தையும் பயன்படுத்தி வெக்டர் பெருக்கலும், பரவுவிதிக்கு (Distributive Law) அடங்கியது என நிறுவலாம்.

நிரூபணம் :

வெக்டர் $s = a\times(b+c) - a\times b - a\times c$ ஆகுக. ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் tயுடன் sஇன் புள்ளிப்பெருக்கற்பலனைக் காண்போம்

$t\cdot s = t\cdot a\times(b+c) - t\cdot(a\times b) - t\cdot(a\times c)$

வலப்பக்கத்தில் புள்ளியையும் பெருக்கற் குறியையும் மாற்றுவதால், மதிப்பு மாறுபடாது.

$\therefore\ t\cdot s = t\times a\cdot(b+c) - t\times(a\cdot b) - t\times(a\cdot c)$

புள்ளிப் பெருக்கற்பலன் பரவுவிதிக்கு அடங்கியது ஆதலால்,

$$t{\cdot}s = (t\times a){\cdot}[(b+c)-b-c]$$
$$= (t\times a){\cdot}[O]$$
$$\therefore \quad t{\cdot}s = O$$

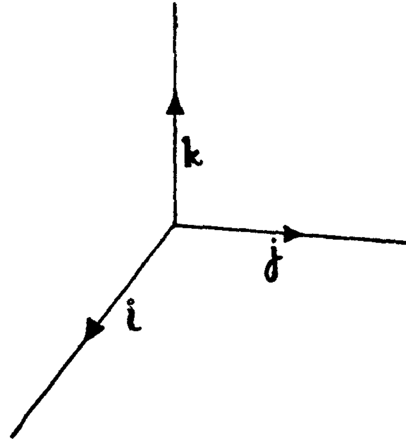
t ஏதேனும் ஒரு வெக்டராதலால் s.க்குக்குத்தாக இருக்கத் தேவையில்லை. t சுழிவெக்டரும் அல்ல,

$\therefore$ s = O அதாவது $a\times(b+c) = a\times b+a\times c$

2.14 வெக்டர் பெருக்கற்பலனைக் குத்துப் பிரிவுகளில் கூற :

i,j,k என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தாக (இடஞ்சுழித்திருகு முறையில்) அமையும் அலகு வெக்டர்களாகுக.

அப்போது a, b என்ற வெக்டர்களை i,j,k என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூறமுடியும்.



படம் 34

$$a = a_1i+a_2j+a_3k$$
$$b = b_1i+b_2j+b_3k$$
$$\therefore a\times b = a_1b_1 i\times i + a_1b_2 i\times j+a_1b_3 i\times k$$
$$+ a_2b_1 j\times i + a_2b_2 j\times j + a_2b_3 j\times k$$
$$+ a_3b_1 k\times i + a_3b_2 k\times j + a_3b_3 k\times k$$

$j\times k = -k\times j = i;\ k\times i = -i\times k = j;\ i\times j = -j\times i = k$

$i\times i = O \qquad j\times j = O \qquad k\times k = O$ ஆதலால்

$a\times b = (a_2b_3-a_3b_2)i + (a_3b_1-a_1b_3)j + (a_1b_2-a_2b_1)k$ எனவருகிறது.

குறிப்பு 1 · இதை அணிகோவை (Determinant form) உருவத்தில் கீழ்வருமாறு கூறலாம்.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} & & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

குறிப்பு 2 : ஒரு நிரை அணியாக (row matrix) இரு வெக்டர்களையும் ஒன்றன்கீழ் ஒன்றாக எழுதினால் வெக்டர் பெருக்கற்பலனையும் உடனே எழுதலாம்.

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$$
$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3,]$$
$$\therefore\ \mathbf{a}\times\mathbf{b} = [(a_2b_3-a_3b_2), (a_3b_1-a_1b_3), (a_1b_2-a_2b_1)]$$

அல்லது $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$

2.16 அளவை முப்பெருக்கற்பலனைக் குத்துப் பிரிவுகளில் கூறல்:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = (b_2c_3-b_3c_2)\mathbf{i}+(b_3c_1-b_1c_3)\mathbf{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\mathbf{q}$$
$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$$
$$\therefore\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

இதை அணிகோவையாகக் கூற

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

எடுத்துக் காட்டுக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 : முக்கோணம் ABCயில் $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ என நிறுவுக :

A,B,C யின் நிலைவெக்டர்கள் **a,b,c**

$$\therefore\ a = |\mathbf{c}-\mathbf{b}|;\ b = |\mathbf{a}-\mathbf{c}|;\ c = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|$$

$\therefore$ $(b-a)\times(c-a) = bc \sin A\mathbf{n}$ [ABCயின் தளத்திற்கு குத்தாகவுள்ள அலகு வெக்டர் n ஆகும்.

ஆனால் $(b-a)\times(c-a) = b\times c+c\times a+a\times b$

$\therefore$ (i) $a\times b+b\times c+c\times a$ எனும் வெக்டர் A B Cயின் தளத்திற்குக் குத்தாகும். முக்கோணத்தின் பரப்பு $\triangle$ஆனால்

(ii) $\triangle=\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2}\ |a\times b+b\times c+c\times a|$

(iii) $bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C$

$$\therefore \quad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

கணக்கு 2: $a = 2i-3j-k$, $b = i+4j-2k$ என்றால்

(i) $a\times b$ (ii) $b\times a$ (iii) $(a+b)\times(a-b)$ இவைகளைக் கணக்கிடு.

$a = [2,-3,-1]$
$b = [1, 4,-2]$
$\therefore$ $a\times b = [10 \quad 3 \quad 11] = 10i+3j+11k$

(ii) $b = [1, 4,-2]$
$a = [2,-3,-1]$
$b\times a = [-10,-3,-11] = -[10i+3j+11k]$

(iii) $a+b = [3, 1, -3]$
$a-b = [1,-7,+1]$

$\therefore$ $(a\times b)\times(a-b) = [-20,-6,-22]=-[20i+6j+22k]$

அல்லது $(a+b)\times(a-b)$

$= a\times a-a\times b+b\times a-b\times b$

$= O+b\times a+b\times a-O$

$= 2\, b\times a$

$=-[20i+6j+22k]$ [$b\times a$ன் மதிப்பு (ii) ல் கண்டுள்ளோம்]

கணக்கு 3: $a = 2i-6j-3k$
$b = 4i+3j-k$

என்றால் a,b என்ற தளத்திற்குக் குத்தாகவுள்ள அலகு வெக்டரைக் காண்க:

$a\times b = |a|\,|b| \sin\theta\, n$; $|a\times b| = |a|\,|b| \sin\theta \cdot n$, என்பது a,b தளத்திற்குக்குத்தான அலகு வெக்டர்

$$\therefore \quad n = \frac{a \times b}{|a \times b|}$$

$$a \times b = 15i - 10j + 30k$$

$$= 5\ [3i - 2j + 6k]$$

$$\therefore \quad |a \times b| = 5\sqrt{9+4+36} = 35$$

$$\therefore \quad n = \frac{5}{35}\ [3i - 2j + 6k]$$

$$= \left(\frac{3}{7}i - \frac{2}{7}j + \frac{6}{7}k\right)$$

கணக்கு 4 : $a = 2i+3j-k$; $b = i+j+5k$; $c = 16i-11j-k$ என்றால் a,b, cஎன்பவை ஒன்றற்கொன்றுகுத்தான வலக்கை வெக்டர்கள் எனநிறுவுக.

$$a = [2, 3, -1]$$

$$b = [1, 1, 5]$$

$$c = [16, -11, -1]$$

$$\therefore a \times b = [16, -11, -1] \qquad \therefore a \times b = c$$

$$b \times c = [54, 81, -27] \qquad \therefore b \times c = 27a$$

∴ a,b,c என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தான வலக்கை வெக்டர்களாகும்.

கணக்கு 5 : A (2,3,0) B (—1,2,4) என்றபுள்ளி வழிக்கோட்டிலிருந்து R (3,1,—1) என்ற புள்ளியின் மிகச் சிறிய தூரம் என்ன ?

$$AB = [-3, -1, 4] = -3i - j + 4k$$

∴ AB என்ற கோட்டில் அலகு

$$\text{வெக்டர் } e = \frac{-3i - j + 4k}{\sqrt{9+1+16}}$$

$$e = \frac{-3i - j + 4k}{\sqrt{26}}$$

$$AR = [1, -2, -1] = i - 2j - k$$

$$\therefore \quad AR \times e = [1 -2 -1] \times [-3 -1 +4]/\sqrt{26}$$

$$= \frac{[-9, -1, -7]}{\sqrt{26}}$$

$$\therefore \ |AR\times e| = \frac{\sqrt{81+1+49}}{26} = \sqrt{\frac{131}{26}}$$

∴ மிகச்சிறிய தூரம் அல்லது Rலிருந்து ABக்குக் உள்ள தூரம் $=\sqrt{\frac{|131|}{26}}$

கணக்கு 6 : $4i+5j+k, -j-k;\ 3i+9j+4k,\ -4i+4j+4k$ எனும் நிலைவெக்டர்களையுடைய நான்கு புள்ளிகள் ஒரே தளத்தில் அமைபவை எனக்காட்டு. (M.U)

புள்ளிகள் முறையே A,B,C,D ஆகுக,

அப்போது AB,BC,CD, எனும் வெக்டர்கள் சமதள வெக்டர்களாயின் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமையும் அதற்கு $AB\cdot BC\times CD=0$ எனக் காட்ட வேண்டும். Oமூலப் புள்ளியாயின்.

$$\begin{aligned} OA &= 4i+5j+k \\ OB &= 0i-j-k & AB &= -4i-6j-2k \\ OC &= 3i+9j+4k & BC &= 3i+10j+5k \\ OD &= -4i+4j+4k & CD &= -7i-5j+0k \end{aligned}$$

$$\therefore \ AB\cdot BC\times CD = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -7[-30+20]+5[-20+6]$$

$$=70-70=0$$

∴ 4 புள்ளிகளும் ஒரே தளத்தில் அமைபவை.

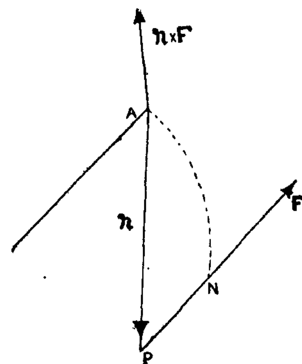
ஒருபுள்ளியைச் சுற்றிஒருவிசையின் திருப்பு திறன்

(Moment of a force about a point)

PN எனும் கோட்டின் வழியுள்ள விசை Fஆகுக. A ஏதேனும் புள்ளியாகுக.

விசையின் கோட்டில் P ஒரு புள்ளியாகுக,

அப்போது $AP\times F$ எனப்படுவது A வைச் சுற்றி விசை F இன் திருப்பு திறன் (Moment or torque of F about A) எனப்படும்.



படம் 35

ஆகவே விசையின் திருப்பு திறன்

(i) ஒரு வெக்டராகும்.

(ii) விசையியங்கும் கோடும், புள்ளியும் நிச்சயிக்கும் தளத்திற்குக் குத்தாகவுள்ள வெக்டராகும்.

(iii) அதன் திசை AP,F இவற்றுடன் வலக்கைத் திருகு மரபில் அமையும்

(iv) AP,F இவற்றிடைக்கோணம் θ என்றால் திருப்பு திறனின் அளவு $F \cdot AP \sin \theta = F \cdot AN$ ஆகும்.

(AN விசையின் கோட்டிற்குள்ள குத்து தூரம்)

சமதள விசைகளின் சுழல் திறன் :

இங்கு ஒரே தள விசைகளைப் பற்றி மட்டும் சொல்வதால், Oவை மூலப்புள்ளியாகவும் i,j எனும் ஒன்றற்கொன்று குத்தான அலகு வெக்டர்களைக் கொள்வோம்.

Aயின் நிலைவெக்டர் $x_2 i + y_2 j$ ஆகுக.

$F = Xi + Yj$ ஆகுக.

$P\ (x_1, y_1)$ எனும் புள்ளி F இல் ஆகுக

$AP = (x_1 - x_2)i, + (y_1 - y_2)j$

$F = xi + yi$

$\therefore\ AP \times F = [Y(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)X]k$

A மூலப்புள்ளி Oவில் ஆனால் A (0,0) ஆகும்

திருப்பு திறன் $= [x_1 Y - y_1 X]k$

திருப்பு திறன் விசைகள் இயங்கும் தளத்திற்குக் குத்தாகவே இருக்குமாதலால், ஒருதள விசைகளைப் பற்றிக் கூறுமிடத்து R என்பதைக் கூறத்தேவையில்லை.

$\therefore$ திருப்பு திறன் (Oவைச் சுற்றி) $= (x_1 Y - y_1 X)$ என மட்டும் கூறினால் போதும்.

குறிப்பு : P,Q என்பவை இருவிசைகளாகுக.

$R = P + Q$ ஆகுக P,R,Q என்பவை

A என்ற புள்ளியில் தாக்கட்டும்.

அப்போது O என்ற புள்ளியைச்சுற்றி அவற்றின் திருப்பு திறனைக் காண்போம்.

$$\begin{aligned} \text{R ன் திருப்பு திறன்} &= OA \times R \\ &= OA \times (P+Q) \\ &= OA \times P + OA \times Q \end{aligned}$$

= Pயின் திருப்பு திறன் + Qவின் திருப்புதிறன்.

இருவிசைகளின் திருப்புதிறன்களின் கூடுதல், அவற்றின் கூடுதலின் திருப்புத்திறனுக்குச் சமமாகும் :

கணக்கு : $4i-2j+9k$ என்ற நிலை வெக்டருடைய புள்ளி A வழிச் செல்லும் விசை $P=9i+3j-6k$ ஆகும் $6i-3j-7k$ என்ற நிலை வெக்டருடைய B என்ம் புள்ளியைச் சுற்றி அதன் திருப்பு திறன் கணக்கிடுக.

திருப்பு திறன் $= BA \times P$

B $= [6,-3,-7]$ அதாவது $6i-3j-7k$

A $= [4,-2,9]$ அதாவது $4i-2j+9k$

$\therefore BA = [-2, 1\ 16]$

$P = [9, 3, -6]$

$\therefore BA \times P = [-54, 132, -15]$

$= -3[18, -44, 5]$

திருப்பு திறன் $= -3[18i-44j+5k]$

பயிற்சி

1. சுருக்குக. (i) $2j \times (3i-4k)$ (ii) $(i+2j) \times k$
(iii) $(2i-4k) \times (i+2j)$ (iv) $(i+4j+3k) \times (4i+3k)$
(v) $(3i+2j-k) \times (3i-2j+4k)$

2. $a=i-2j+3k; b=2i+j-k; c=i+3j-2k$ என்றால் (i) $(a \times b) \times c$ (ii) $a \cdot b \times c$ (iii) $(a \times b) \times (b \times c)$ (iv) $|a \times (b \times c)|$ (v) $(a \times b) \cdot c$ இவற்றைக் காண்க.

3. $a=3i-j-2k$; $b=2i+3j+3k$ என்றால் a, b இவற்றிற்குக் குத்தான அலகு வெக்டர் காண்க.

4. $u=2i-3j-k; v=i+3j-2k$ என்றால் u, v இவற்றிற்குக் குத்தான அலகு வெக்டர் காண்க.

5. $2i-j+k$; $3i+4j-k$ என்ற இரு வெக்டரிடையே உள்ள கோணத்தின் சைன் விகிதம் என்ன ?

6. $i+2j-k$ என்ற புள்ளியைச் சுற்றி, $2i-j+3k$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் $3j+k$ என்ற விசையின் திருப்பு திறன் என்ன ?

7. $A(1,-3,4)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து $B(4,-3,5)$ எனும் புள்ளியை நோக்கி 13 அலகுள்ள விசை செல்கிறது. $P(2,3,7)$ எனும் புள்ளியைச்சுற்றி அதன் திருப்பு திறன் என்ன ?

8. $A(2,3,0)$ $B(-1,2,4)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிலிருந்து $R(3,1,-1)$ எனும் புள்ளியின் மிகச்சிறிய தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

9. $A(1,-2,-1)$ $B(4,0,-3)$ $C(1,2,-1)$ $D(2,-4,-2)$ என்பவை நான்கு புள்ளிகள் என்றால்,

AB, CD என்றகோட்டிடையேயுள்ள மிகச்சிறிய தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

10. $A(2,4,1)$ $B(-1,0,1)$ $C(-1,4,2)$ என்ற புள்ளிகள் அமையும் தளத்திற்கு $(1,-2,1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்துள்ள குத்து தூரமென்ன ?

11. $5i+6j+7k$; $7i-8j+9k$; $3i+20j+5k$ எனும் வெக்டர்கள் ஒரே தளத்தில் உள்ளவை எனக்காட்டு. (M.U.)

12. $a=4i-8j+k$ $b=2i-j-2k$ $c=3i-4j+12k$ இவற்றைப் பக்கங்களாகவுடைய இணைகரத்திண்மத்தின் கொள்ளளவு என்ன ? (M.U.)

2·17 வெக்டர் முப்பெருக்கற்பலன் (Vector Triple Product)

a, b, c என்பவை மூன்று வெக்டர்களானல் $(a\times b)\times c$ என்பதும் ஒரு வெக்டராகும் எனத் தெரிகிறது. இதனை வெக்டர் முப் பெருக்கற் பலன் எனக்கூறுவார். இதன் விரிவு (Expansion) என்ன என்பதைக் காண்போம்.

$(a\times b)\times c=(a\cdot c)b-(b.c)a$ என நிறுவ

நிரூபணம்:

$(a\times b)\times c$ எனும் வெக்டர் $(a\times b)$ என்ற வெக்டருக்குக் குத்தாகும். ஆனல் a, b என்ற வெக்டர்களும் $(a\times b)$ எனும் வெக்டருக்கு குத்தாகவுள்ளன எனக் கூறியுள்ளோம்.

$\therefore$ a, b, எனும் வெக்டர்கள் அமைக்கும் தளத்தில் $(a\times b)\times c$ எனும் வெக்டரும் அமைகிறது. ஆகவே, இதனை a, b என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் கூற முடியும்.

$\therefore\ (a\times b)\times c = \lambda a+\mu b$ [1·14 பார்க்க]

ஆனால் $(a\times b)\times c\cdot c = 0$

$\therefore\ \lambda\,(a\cdot c)+\mu(b\cdot c)=0$

$\therefore\ \dfrac{a\cdot c}{\mu}=\dfrac{b\cdot c}{-\lambda}=\dfrac{1}{\alpha}$ ஆகுக.

$\therefore\ \mu = \alpha\,(a\cdot c)$

$\lambda = -\alpha(b\cdot c)$

$\therefore\ (a\times b)\times c = \alpha\,[(a\cdot c)b-(b\cdot c)a]$. ......(1)

α இன் மதிப்பைக்காண வேண்டும்.

a க்கு இணையாக 'i' வெக்டரைக் கொள்க. a, bயின் தளத்தில் j வெக்டரைக் கொள்க.

$\therefore\ a=a_1\,i$

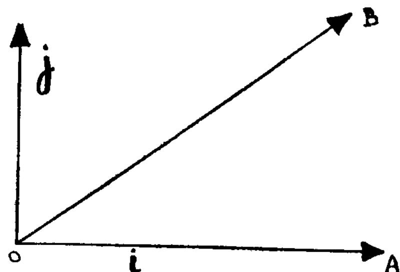
$b=b_1 i+b_2 j$

$c=c_1\,i+c_2 j+c_3 k$

$\therefore\ a\times b=a_1\,b_2\,k$

$\therefore\ (a\times b)\times c = (a_1b_2c_1)j-a_1\,b_2\,c_2\,i$ ......(i)

$\alpha\,[(a\cdot c)\,b-(b\cdot c)a]$ யின் மதிப்பைக் காண்போம்.



படம் 36

$a\cdot c=a_1c_1$

$(a\cdot c)b=a_1b_1c_1 i+a_1b_2c_1 j$

$b\cdot c=b_1c_1+b_2c_2$

$\therefore\ (b\cdot c)a=a_1b_1c i_1+a_1b_2c_2 i$

$\therefore\ (a\cdot c)b-(b\cdot c)a=a_1b_2c_1 j-a_1b_2c_2 i$ ......(ii)

ஆனால் $(a\times b)\times c=\alpha[(a\cdot c)b-(b\cdot c)a]$

(i), (ii) லிருந்து $\alpha=1$

$\therefore\ (a\times b)\times c=(a.c)b-(b.c)a$

குறிப்பு : $c\times(a\times b)=-[(a\times b)\times c]$

$c\times(a\times b)=(b\cdot c)a-(c\cdot a)b$

குறிப்பு : $(a\times b)\times c=(a\cdot c)b-(b\cdot c)a$

$(b\times c)\times a=(b\cdot a)c-(c.a)b$

$(c\times a)\times b=(c.b)a-(a\cdot b)c$

வெக்டர்களை இடம் மாற்ற வெவ்வேறு பெருக்கற் பலன் வருகிறது. மூன்றையும் கூட்ட,

$(a \times b) \times c + (b \times c) \times a + (c \times a) \times b = 0$ என வருகிறது.

2·18 நான்கு வெக்டர்களின் பெருக்கல்

நான்கு வெக்டர்களின் அளவைப் பெருக்கற்பலன் (Quadruple scalar product)

$a \times b \cdot (c \times d)$

$= a \times b \cdot (c \times d)$

$= a \cdot b \times (c \times d)$

[a, b, c×d என்பதன் அளவை முப் பெருக்கற் பலனாகக் கொள்ள] [புள்ளியையும், பெருக்கல் குறியையும் மாற்ற]

$= a \cdot [(b \cdot d)c - (b \cdot c)d]$

$= (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$

இதை அணி கோவையாகக் கூறலாம்.

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot c & a \cdot d \\ b \cdot c & b \cdot d \end{vmatrix}$$

2·19 நான்கு வெக்டர்களின் வெக்டர் பெருக்கற்பலன் (Quadruple vector product)

$(a \times b) \times (c \times d)$ என்பதன் விரிவைக் காண்போம்.

$c \times d = u$ ஆகுக.

$(a \times b) \times u = (a \cdot u)b - (b \cdot u)a$

$= (a \cdot c \times d)b - (b \cdot c \times d)a$

$\therefore (a \times b) \times (c \times d) = [acd]b - [bcd]a$

இதையே வேறு வகையாக, அதாவது c, d என்ற வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாகக் காண்போம்.

$(a \times b) = v$ ஆகுக

$\therefore (a \times b) \times (c \times d) = v \times (c \times d)$

$= (v \cdot d)c - (v \cdot c)d$

$\therefore (a \times b) \times (c \times d) = [abd]c - [abc]d$

$\therefore [acd]b - [bcd]a = [abd]c - [abc]d$

$\therefore [abc]d = [bcd]a - [acd]b + [abd]c$

$= [bcd]a + [cad]b + [abd]c$

ஆகவே ஏதேனும் ஒரு வெக்டர் dஐ a,b,c என்ற ஒரே தளத்தில் அமையாத வெக்டர்களின் ஒருபடிச் சேர்க்கையாக ஒரே முறையில் மட்டும் கூற முடியும் எனக்காண்கிறோம். இதையே 1·14ல் படம் வரைந்து கண்டோம்.

பயிற்சி

1. $u = 2i+5j-3k;\ v = i+7j+5k;\ w = 2i-6j+k$
   $x = i+j+k$ என்றால் கீழ் வருவன காண்க.

(i) $u \times v \cdot w$ (ii) $(u \times v) \times w$ (iii) $u \times (v \times w)$

(iv) $(u \times v) \cdot (v \times w)$ (v) $(u \cdot w)(v \cdot x) - (u \cdot x)(v \cdot w)$

2. கீழ் வருபன காண்க:

(i) $(a+b) \cdot (b+c) \times (c+a) = 2[cba]$

(ii) $(a-b) \cdot (b-c) \times (c-a) = 0$

பின் கண்டவற்றை நிரூபி

3. $(a \times b) \cdot (c \times d) + (b \times c) \cdot (a \times d) + (c \times a) \cdot (b \times d) = 0$

4. $(a \times b) \times (b \times c) \cdot (c \times a) = [abc]^2$

5. $(a-d) \cdot (b-c) + (b-d) \cdot (c-a) + (c-d) \cdot (a-c) = 0$

பிற்கோப்பு :
இயல் முறை கணிதத்தில்
வெக்டர் கணிதம் பயன்படும் வகை

முன்னுரை : மூன்று அளவு வெளியில் (Three dimensional Space), புள்ளிகள், நேர்கோடுகள், சமதளங்கள், இவை பற்றி வெக்டர் கணிதம் வழி ஆராயும் வகையை இப்பிற்கோப்பில் விவரிப்போம். ஆங்காங்கு வெக்டர் குறியீட்டிலிருந்து, கார்டீசியக் கூறுகளில் கூறும் முறையும், மறுதலையாகக் கார்டீசியக் கூறுகளிலிருந்து வெக்டர் குறியீட்டில் கூறும் வகையையும் விவரிப்போம்.

1. **புள்ளி :** ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O வை மூலப்புள்ளியாகக் கொண்டால், வெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியையும் அதற்கே என உரித்தான ஒரு நிலை வெக்டராய் கூறலாம் எனக் கூறியுள்ளோம். [9 பார்க்க] P ஏதேனும் புள்ளியானால் OP அதன் நிலை வெக்டராகும். அதை r எனவும் எழுத்துக் குறியீட்டாலும் குறிக்கலாம்.

புள்ளியின் கார்டீசியக் கூறுகள்: r எனும் வெக்டரைக் குத்துப் பிரிவுகளாகிய i, j, k எனும் அலகு வெக்டர்களில் $r = xi + yj + zk$ எனக்கூறலாம் எனக் கண்டோம் அப்போது (x, y, z) என்பவை P யின் கார்டீசியக் கூறுகள் எனப்படும்.

மறுதலையாக, P யின் கார்டீசியக் கூறுகள் (x, y, z) என்றால் அதன் நிலை வெக்டர் $r = xi + yj + zk$

2. **இரு புள்ளிகளிடையே உள்ள தூரத்தைக் கூறும் சூத்திரம்.**

$A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$ இரு புள்ளிகளாகுக. அவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் a, b ஆகுக.

$\therefore\ \mathbf{a} = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$

$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$

$\therefore\ \mathbf{AB} = (x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$.

$\therefore$ A, B இடையேயுள்ள தூரம்

$$AB = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

இரு அளவு வெளியில், k உறுப்பு இருக்காது. அப்போது $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ஆகும்.

3. இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டுத் துண்டை குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி ஒரு கோடமையும் புள்ளிகள் A, B, P ஆகுக. அவற்றின் நிலை வெக்டர்கள் $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{p}$ ஆகுக. P எனும் புள்ளி A, B ஐ $\lambda : 1$ விகிதத்தில் பிரித்தால் $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}$ எனக்கூறியுள்ளோம்.

கார்டீசியக் கூறுகளில் கூற:

A B Pயின் கார்டீசியக் கூறுகள் முறையே (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) (x_p, y_p, z_p) ஆகுக. அப்போது,

$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$

$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$

$\mathbf{p} = x_p\mathbf{i}+y_p\mathbf{j}+z_p\mathbf{k}$

$\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{1+\lambda}$ என்றதில் i, j, k எனும், பிரிவுகளைச் சமன்படுத்த

$$x_p = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_p = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z_p = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

எனவருகிறது.

[குறிப்பு : விகிதத்தை m : n என்று கொண்டால்

$$x_p = \frac{mx_2+nx_1}{m+n},\quad y_p = \frac{my_2+ny_1}{m+n},\quad z_p = \frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

எனக் காண்கிறோம்.]

ஒரு கோட்டின் திசைக் கோசைன்கள் : ஒரு கோட்டின் திசையை எவ்வாறு திசைக் கோசைன்களால் கூறுகிறோம் என்று பார்த்தோம்.

அவை l, m, n எனில், $l^2+m^2+n^2 = 1$ எனவும் கண்டோம். l, m, n என்ற திசைக் கோசைன்களையுடைய அலகு வெக்டர் $\mathbf{e} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ எனவும் கண்டோம். இதை அடிக்கடி பயன் படுத்துவோமாதலில் மீண்டும் கூறுகிறோம்.

திசை விகிதங்கள் : திசைக் கோசைன்களுடன் நேர்விகிதத்தில் உள்ள, எந்த மூவெண் தொகுதியும் கோட்டின் திசை விகிதங்கள் (Direction ratios) எனப்படும். (l, m, n) திசைக் கோசைன்களாயின் (Rl, Rm, Rn) அதன் திசை விகிதங்களாகும். [R ஏதேனுமொரு எண்]

குறிப்பு 1: $OP = \mathbf{r} = (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ என்றால் OP திசையில் அலகு வெக்டர்,

$\frac{x}{|\mathbf{r}|}\mathbf{i} + \frac{y}{|\mathbf{r}|}\mathbf{j} + \frac{z}{|\mathbf{r}|}\mathbf{k}$ [24 பார்க்கவும்.]

(i) ∴ OP யின் திசைக்கோசைன்கள் $\frac{x}{|\mathbf{r}|}, \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \frac{z}{|\mathbf{r}|}$

(ii) அதன் திசை விகிதங்கள் (x, y, z,)

குறிப்பு 2 : $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ இருபுள்ளிகளாயின்

$(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$

ஆகவே AB யின் திசைக் கோசைன்கள்

$$\frac{(x_2-x_1)}{AB}, \frac{(y_2-y_1)}{AB}, \frac{(z_2-z_1)}{AB}$$

குறிப்பு : (i) AB || CD என்றால்,

$\mathbf{AB} = \lambda\mathbf{CD}$

ஆகவே AB, CD இவற்றின் திசை விகிதங்கள் நேர் விகிதப் பொருத்தத்தில் இருக்கும். மறுதலையாக, திசை AB, CD என்பவற்றின் விகிதங்கள் நேர்விகிதப் பொருத்தத்தில் இருந்தால், AB || CD ஆகும்.

(ii) $AB \parallel BC$ எனின், A, B, C ஒரு கோடமைனவாகும்.

$AB = \lambda BC$ ஆதலால் இரு கோட்டுத் துண்டுகளின் விகிதம் திசை விகிதங்களின், விகிதமாகும்.

உதாரணம் : (2, 5, −4); (1, 4, −3); (4, 7, −6); (5, 8, −7) எனும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனக்காட்டு.

புள்ளிகளை A, B, C, D எனக்குறிக்க,

$AB = -i-j+k$

$BC = 3i+3j-3k \qquad BC = -3AB = 3BA$

$CD = i+j-k \qquad BC = 3CD$

$AD = 3i+3j-3k$

∴ B, C, A ஒரு கோடமைவன.
B, C, D ஒரு கோடமைவன.

∴ A, B, C, D எனும் நான்கு புள்ளிகளும் ஒரு கோடமைவன. [AB = DC AD = BC என வருவதையும் காணலாம்.]

இரு கோடுகளிடையே உள்ள கோணம் :

இருகோடுகளின் திசை விகிதங்கள் (l,m,n), (l^1,m^1,n^1) ஆகுக. அவற்றிடையே உள்ள கோணம் θ ஆகுக. OP, OQ கோடுகளுக்கு இணையான அலகு வெக்டர்களாகுக.

$$\therefore OP\cdot OQ = |OP|\,|OQ|\,\text{Cos}\,\theta$$
$$= \text{Cos}\,\theta$$

ஆனால் $OP = li+mj+nk$

$OQ = l^1i+m^1j+n^1k$

$$\therefore OP\cdot OQ = ll^1+mm^1+nn^1$$
$$\therefore \text{Cos}\,\theta = ll^1+mm^1+nn^1$$

குறிப்பு : 1 (i) இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று குத்தானால்,

$$OP\cdot OQ = 0$$
$$\therefore ll^1+mm^1+nn^1 = 0$$

(ii) p, q, r இவை திசை விகிதங்களானால் கோடுகள் குத்தாக இருக்க $pp^1+qq^1+rr^1 = 0$

[ஏனெனில் $p=Rl,\ q=Rm, r=Rn;\ p^1=R^1l^1;\ q^1=R^1m^1;\ r^1=R^1n^1$]

$$\text{Sin}\,\theta = \sqrt{\sum (mn^1-m^1n)^2}$$

என நிறுவ.

$OP = li+mj+nk$

$OQ = l^1i+m^1j+n^1k$

$\therefore OP \times OQ = (mn^1 - m^1n)\mathbf{i} + (nl^1 - n^1l)\mathbf{j} + (lm^1 - l^1m)\mathbf{k}$

ஆனால் $OP \times OQ = \sin\theta \cdot \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ அலகு வெக்டர்)

$\therefore \sin\theta = |OP \times OQ|$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{(mn'-m'n)^2 + (nl'-n'l)^2 + (lm'-l'm)^2}$

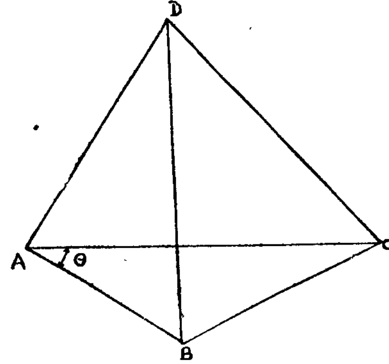
நான்முகியின் கொள்ளளவு : (Volume of a tetrahedron)

(i) வெக்டர் குறியீட்டில்:

ABCD நான்முகியாகுக.

$AB \times AC = (AB)(AC) \sin\theta \, \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$, ABC என்ற தளத்திற்குக் குத்தாக உள்ள அலகு வெக்டர்)

$\therefore AB \times AC = 2\triangle \mathbf{n}$ ($\triangle$ = முக்கோணம் ABC யின் பரப்பு).



படம் 37

$$AB \times AC \cdot AD = 2\triangle \mathbf{n} \cdot AD$$
$$= 2\triangle h$$
$$= 6V$$

[h = நான்முகியின் உயரம். ABC ஐ அடிப்பக்கமாகக் கொள்ள]

[நான்முகியின் கொள்ளளவு $V = \frac{1}{3}\triangle h$ என்பது சூத்திரம்]

$$\therefore V = \tfrac{1}{6} AB \times AC \cdot AD$$

(ii) கார்டீஷியக் குறியீட்டில் $A(x_1y_1z_1)$, $B(x_2y_2z_2)$, $C(x_3y_3z_3)$ $D(x_4y_4z_4)$ ஆகுக. அப்போது,

$$AB = (x_2-x_1)\mathbf{i} + (y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}$$

$$AC = (x_3-x_1)\mathbf{i} + (y_3-y_1)\mathbf{j} + (z_3-z_1)\mathbf{k}$$

$$AD = (x_4-x_1)\mathbf{i} + (y_4-y_1)\mathbf{j} + (z_4-z_1)\mathbf{k}$$

$$\therefore V = \tfrac{1}{6} AB \times AC \cdot AD =$$

$$\therefore V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

குறிப்பு : $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ எனவும்

கூறலாம். ஏனெனில் இரு அணிகோவைகளும் சமம்.

நான்முகியின் கொள்ளளவை, இரு எதிர்ப்பக்கங்களின் நீளங்களில் கூற :

AD×BC எனும் வெக்டர், AD, BC, எனும் வெட்டாத இரு விளிம்புகளுக்கும் பொதுக் குத்தான வெக்டராகும். இதில் அமையும் அலகுவெக்டர் $\frac{AD\times BC}{|AD\times BC|}$

∴ AD, BC, இரு விளிம்புகளுக்கிடையேயுள்ள மீச்சிறு குத்து

தூரம் $d = AB \cdot \frac{AD\times BC}{|AD\times BC|}$

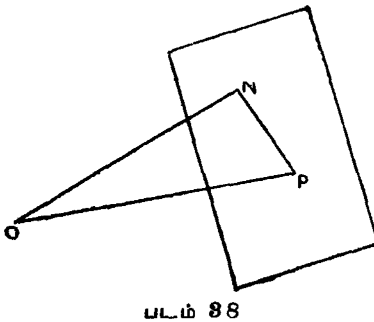
$$\therefore\ d = \frac{AB\cdot AD\times(AC-AB)}{AD\cdot BC\sin\theta}$$

$$= \frac{AB\cdot AD\times AC}{AD\cdot BC\sin\theta}\ (AB\cdot AD\times AB = 0 \text{ ஆனதால்})$$

$$= \frac{6V}{ab\sin\theta}\ [AD=a;\ BC=b \text{ ஆகுக.}]$$

$$\therefore\ V = \tfrac{1}{6}\,abd\sin\theta$$

தளத்தின் சமன்பாடு :



படம் 38

O என்பதை மூலப்புள்ளியாகக் கொள்வோம். ஒரு தளத்திற்கு ON குத்துக் கோடாகுக. ON = p ஆகுக தளத்தில் P ஏதேனும் புள்ளியாகுக. அதன் நிலை வெக்டர் r என்க. ON திசையில் அலகுவெக்டர் e என்க. P தளத்தில் எங்கிருப்பினும் PN ⊥r ON [இது தளத்தின் முக்கிய பண்பு]

∴ ON என்ற திசையில் OPயின் வீழல் = ON = p

ஆகவே $r\cdot e = p$

இதுவே தளத்தின் ஒரு வெக்டர் சமன் பாடாகும்.

கார்டீயக் கூறுகளில் சமன்பாடு.

e இன்திசைக்கோசைன்கள் l, m, n என்றால் $e = li+mj+nk$
P(x, y, z) என்றால் $r = xi+yj+zk$

$$\therefore r \cdot e = lx+my+nz$$

$\therefore$ தளத்தின் சமன்பாடு $lx+my+nz = p$ ஆகும்.

மூன்றுபுள்ளிகள் வழி அமையும் தளத்தின் சமன்பாடு:

A,B,C மூன்று புள்ளிகளாகுக. O எனும் மூலப்புள்ளிக்கு அவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் a,b,c என்க. அவை வழி அமையும் தளத்தில் r எனும் நிலை வெக்டரையுடைய P ஏதேனும் புள்ளி ஆகுக.

அப்போது AP,AB,AC ஒருதள வெக்டர்களானதால்,

$$AP \times AB \cdot AC = 0$$

அதாவது $(r-a)\times(b-a)\cdot(c-a) = O$

[இதைவிரித்தெழுத $r\cdot[a\times b+b\times c+c\times a]=[abc]$ எனவரும்]

$r = xi+yj+zk$; $a = x_1i+y_1j+z_1k$ $b = x_2i+y_2j+z_2k$
$c = x_3i+y_3j+z_3k$ ஆனால்

கார்டீசியக் கூறுகளில் தளத்தின் சமன்பாடு:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

என வருவதைக் காண்கிறோம்.

மாற்றுமுறை : A B,C,P சமதளப் புள்ளிகளானால் அவற்றின் நிலைவெக்டர்கள் கீழ்வரும் நியதிக்குட்பட்டு இருக்கவேண்டும் எனக்கண்டோம்.

அதாவது $\delta P+\alpha a+\beta b+\gamma c = 0$

$$\delta+\alpha+\beta+\gamma = 0$$

கார்டீசியன் உறுப்புக்களில் கூறு :

i,j,k என்ற திசையிலுள்ள குத்துப்பிரிவுகள் தனித்தனியே பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad \delta x + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$
$$\delta y + \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0$$
$$\delta z + \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 = 0$$

அல்லாமலும். $\delta + \alpha + \beta + \gamma = 0$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ இவைகளை நீக்க, தளத்தின் சமன்பாடு.

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ எனவருகிறது.

இரண்டு புள்ளிகளைக் கொண்டு, ஒருகோட்டிற்கு இணையாகவுள்ள தளத்தின் சமன்பாடு.

a, b இருபுள்ளிகளின் நிலைவெக்டராகுக. cஎனும் வெக்டர், கோட்டிற்கு இணையாகுக. rஎன்பது தளத்தில்உள்ள ஏதேனும் புள்ளியின் நிலைவெக்டரானல் $(r-a), (a-b)$, c என்பவை சமதள வெக்டராகும்.

∴ சமன்பாடு $(r-a)\cdot(a-b)\times c = 0$.

c யின் திசைக்கோசைன்கள், l, m, n என்றால் (இதன் கார்டீசிய உருவத்தை அணி கோவையில் காண்க)

(iii) ஒருபுள்ளியைக் கொண்டதும், இருகோடுகளுக்கிணையாக அமைவதுமானதளத்தின் சமன்பாடு.

புள்ளியின் நிலைவெக்டர் a ஆகுக

தளத்தின் ஏதேனும புள்ளி r ஆகுக.

தரப்பட்டுள்ள கோடுகளுக்கு இணையாகவுள்ள வெக்டர்கள் b,c ஆகுக.

அப்போது $(r-a)$,b,c இவை சமதள வெக்டர்களாகும்.

∴ தளத்தின் சமன்பாடு $(r-a)\cdot b\times c = 0$

குறிப்பு : b, c இன் திசைக்கோசைன்கள் (l_1, m_1, n_1) (l_2, m_2, n_2) ஆனல் கார்டீசியக் கூறுகளில் சமன்பாடு

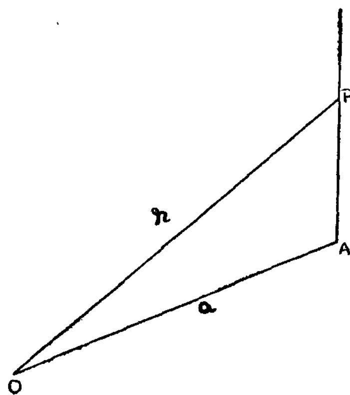
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

எனவருகிறது.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு :

(i) ஒரு புள்ளி வழி, குறிப்பிட்ட திசைக்கோசைன்களையுடைய கோட்டின் சமன்பாடு :

O என்ற புள்ளியை மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ள A எனும் புள்ளியின் நிலை வெக்டர் a ஆகுக.



படம் 39

e என்பது (l, m, n) எனும் திசைக் கோசைன்களையுடைய அலகுவெக்டராகுக. P எனும் புள்ளி A வழியாகவும் e க்கு இணையாகவும் உள்ள கோட்டில் யாதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக. அதன் நிலை வெக்டர் r ஆகுக.

$$\mathbf{AP} \parallel^{l} \mathbf{e}$$

$\therefore \ \mathbf{r}-\mathbf{a}=t\mathbf{e}$ [t துணையலகு எண்]

இது துணை அலகில் தரப்படும் கோட்டின் வெக்டர் சமன்பாடு ஆகும்.

கார்டீசியக் கூறுகளில் கூற $\quad \mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

A எனும் புள்ளி (x_1,y_1,z_1) $\quad \therefore \mathbf{a} = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$

$$\mathbf{e} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$$

$$\therefore \ (x-x_1)\,\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\,\mathbf{k} = t\,(l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k})$$

குத்துக் கூறுகளைச் சமன் படுத்த

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = t$$ எனக்

கோட்டின் சமன்பாடு கார்டீசியக் கூறுகளில் வருகிறது.

மாற்று உருவத்தில் சமன்பாடு :

$(\mathbf{r}-\mathbf{a}) \parallel^{1} \mathbf{e}$

$\therefore \ (\mathbf{r}-\mathbf{a})\times\mathbf{e} = 0 \qquad \therefore \ \mathbf{r}\times\mathbf{e}=\mathbf{a}\times\mathbf{e}$

$\mathbf{r}-\mathbf{a} = (x-x_1)\mathbf{i}+(y-y_1)\mathbf{j}+(z-z_1)\mathbf{k}$

$\mathbf{e} = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$

$$\therefore\ (\mathbf{r}-\mathbf{a})\times\mathbf{e} = [n(y-y_1)-m(z-z_1)]i + [l(z-z_1)-n(x-x_1)]j + [(m(x-x_1)-l(y-y_1)]k = 0$$

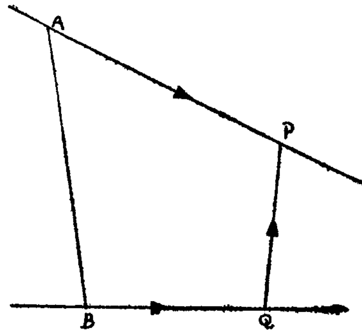
∴ குத்துப்பிரிவுகள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமானதால்

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$ என வருகிறது.

மறுதலையாக $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} =$ எனும் கார்டீசியச் சமன்பாட்டின் வெக்டர் உருவம் $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\times\mathbf{e}=0$

இரு வெட்டாத கோடுகளிடையேயுள்ள மீச்சிறு குத்து தூரத்தைக்காண :

a எனும் நிலைவெக்டருடையபுள்ளி Aவழியுள்ள ஒருகோட்டில் அமையும் அலகு வெக்டர் e_1 ஆகுக bஎனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளி B வழியுள்ள கோட்டில் அமையும் அலகு வெக்டர் e_2 ஆகுக.



படம் 40

அப்போது $AB = b-a$

$\mathbf{e}=\frac{e_1\times e_2}{|(e_1\times e_2)|}$ என்பது e_1, e_2 என்ற இரு வெக்டருக்கும் குத்தான அலகு வெக்டராகும். இதன் பேரில் ABயின்வீழல் இரு கோடுகளிடையேயுள்ள மீச்சிறு குத்துதூரமாகும்.

$$\text{மீச்சிறு குத்துதூரம்} = \frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot e_1\times e_2}{|(e_1\times e_2)|}$$

கார்டீசியக் கூறுகளில் : A (x_1,y_1,z_1) B (x_2,y_2,z_2)

புள்ளிகளாகுக, $e_1 = l_1\mathbf{i}+m_1\mathbf{j}+n_1\mathbf{k}$

$e_2 = l_2\mathbf{i}+m_2\mathbf{j}+n_2\mathbf{k}$

$e_3 = l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$ ஆகுக

அப்போது கோடுகளின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$|e_1\times e_2| = \sin\theta = \sqrt{\sum(m_1n_2-m_2n_1)^2}$$

∴ மீச்சிறு குத்து தூரம் $=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\div\sin\theta$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sin\theta$$

குறிப்பு PQ பொதுக்குத்துக் கோடெனில் ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}, \mathbf{r}-\mathbf{a}$ ஒருதளமாவதால்) APQ என்ற தளத்தின் சமன்பாடு $(\mathbf{r}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}=0$

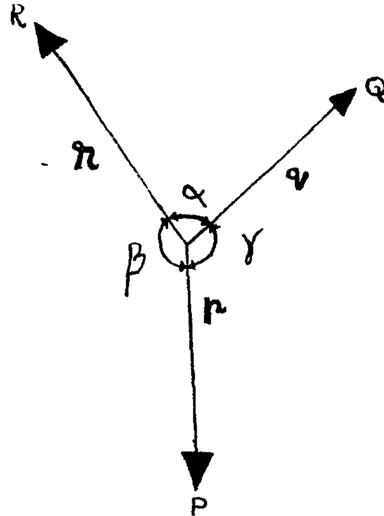
BPQ என்ற தளத்தின் சமன்பாடு $(\mathbf{r}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}=0$
இரண்டும் சேர்ந்து PQன் சமன்பாடாகும்.

(r என்பது P இன் நிலை வெக்டர்)

பிற்கோப்பு 2

லாமியின் தேற்றம் : (Lami's Theorem)

ஒரு புள்ளியை மூன்று விசைகள் தாக்க, அது நிலைமாறுதிருந்தால், ஒவ்வொரு விசையும், மற்றிரு விசைகளிடையே யுள்ள சைன் விகிதத்துடன் நேர் விகிதப் பொருத்தத்திலிருக்கும்.



படம் 41

P, Q, R எனும் விசைகள் Oவில் தாக்க, அப்புள்ளி நிலைமாறுதிருக்கட்டும். விசைகளின் திசையில் உள்ள அலகு வெக்டர்கள் முறையே p, q, r ஆகுக. அப்போது வெக்டர் குறியீட்டில் விசைகள் Pp, Qq, Rr ஆகும்.

∴ $P\mathbf{p}+Q\mathbf{q}+R\mathbf{r}=0$

ஆகவே p, q, r என்பவை சமதள வெக்டர்கள் அதாவது விசைகள் ஒரே சமதளத்திலுள்ளவை
q ஆல்வெக்டர் பெருக்கல் செய்ய·

$$\mathbf{Pp}\times\mathbf{q}+\mathbf{Qq}\times\mathbf{q}+\mathbf{Rr}\times\mathbf{q}=O$$

$$\therefore\quad \mathbf{Pp}\times\mathbf{q}+\mathbf{Rr}\times\mathbf{q}=O\quad(\therefore \mathbf{q}\times\mathbf{q}=0)$$

$$\mathbf{Pp}\times\mathbf{q}=\mathbf{q}\times\mathbf{Rr}$$ [p q இடைக்கோணம் γ; r, q

$$P\sin\gamma=R\sin\alpha$$ இடைக்கோணம் α]

$$\therefore\quad \frac{P}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\gamma}\qquad \begin{bmatrix}\mathbf{p}\times\mathbf{q}=\sin\gamma\\ \mathbf{q}\times\mathbf{r}=\sin\alpha\end{bmatrix}$$

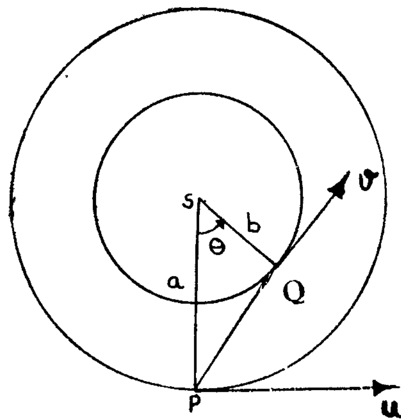
இதே போன்று $\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}$

$$\therefore\quad \frac{P}{\sin\alpha}=\frac{Q}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\gamma}$$

வான கணிதத்தில் ஒரு தேற்றம்: P,Q என்ற இரு கோள்கள் ஒன்றிலிருந்து ஒன்றைப் பார்க்கும்போது திசைமாறு நிலையிலிருந்தால் P, Q சூரியனிடம் தாங்கும் கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{au+bv}{av+bu}\right)$ ஆகும். இங்கு P, Q என்ற கோள்களின் சூரியனிடமிருந்துள்ள தூரம் a, b ஆகவும், அவற்றின் வேகங்கள் u, v ஆகவும் உள்ளன.

திசை மாறு நிலையில் P ஐப் பொருத்த Q வின் சார்பு வேகம் PQ என்ற திசையில் உள்ளது. சூரியனை S ஆல் குறிக்கவும். S ஐ மூலப் புள்ளியாகக் கொள்ள P, Q வின் நிலை வெக்டர்கள் முறை **a, b** ஆகுக.
அப்போது

$$PQ=\mathbf{b}-\mathbf{a}\text{ ஆகும்.}$$



படம் 42

Q வின் சார்பு வேகம் $= \mathbf{v}-\mathbf{u}$

$$\therefore \quad (\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = O$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{v}+\mathbf{b}\times\mathbf{u} = \mathbf{a}\times\mathbf{u}+\mathbf{b}\times\mathbf{v}$$

$$\therefore \quad \cos\theta\,(av+bu) = au+bv$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{au+bv}{av+bu}$$

[a, u;b, v இவற்றிடைக் கோணம் 90° a, v; b, u இவற்றிடைக் கோணம் 90$-\theta$ என்பதால் மேற்கூறிய முடிவுகள் வருகின்றன].

கல்லூரி நூல் வெளியீட்டு இயக்குநரகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம், சென்னை

1970 ஜனவரி வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

			ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதரம்—I	சி. வேலாயுதம்	6	50
*1-A	,, II	,,	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	,,	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	சோணாசலம்	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	மு. ஆரோக்கியசாமி	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	தி. சி. மோகன்	12	00
8.	,, II	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	10	75
9.	பொருளாதாரக்கோட்பாடுவளர்ந்த வரலாறு	க. முத்தையன்	7	00
10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	சி. வேலாயுதம்	6	75
*11.	,, II	,,	11	50
*12.	நவீன பாங்கு இயல்	க. வெற்றிவேல்	7	50
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	அர. சேஷாசலம்	4	75
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	எம். லூர்துநாதன்	4	25

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்-(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீனபொருளாதாரவளர்ச்சி	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, III	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	கூ. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00
35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வுநூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்கநிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50

42. பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள் ... எம். கே. சுப்பிரமணியம் ... 7 75
43. இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு
(1857—1956)—I ... ம. திருநாவுக்கரசு ... 7 00
44. பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம் ... பு. வி. சீனிவாசன் ... 6 25

வரலாறு

*45. பிரிட்டன் வரலாறு—I ... கி. ர. அனுமந்தன் ... 4 50
*46. ,, II ... ,, ... 3 50
*47. ,, III ... ,, ... 7 25
*48. ஐரோப்பிய வரலாறு—I ... டி. வி. சொக்கப்பா ... 4 50
49. ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு
காலச் சரித்திரம் ... வை. விருத்தகிரீசன் ... 15 00
50. இங்கிலாந்து வரலாறு—I ... இரா. அண்ணமலை ... 13 00
51. ,, II ... பா. மாணிக்கவேலு ... 13 00
52. ,, III ... என். ஜே. ராஜகோபால் ... 8 00
53. ,, IV ... ,, ... 8 00
54. இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I ... க. த. திருநாவுக்கரசு ... 15 00
55. ,, II ... எம். எக்ஸ். மிராண்டா ... 8 00
56. ,, III ... ,, ... 5 00
57. இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I ... தி. வெ. குப்புசாமி ... 7 50
58. ,, II ... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப் ... 9 00
59. ,, III ... அ. பாண்டுரங்கன் ... 11 00
60. கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I ... சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன் ... 7 50
61. ,, II ... ,, ... 7 00
62. ,, III ... பி. இராமானுஜம் தேவதாஸ் ... 7 75
63. ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்தியவரலாறு—I ... தி. வெ. குப்புசாமி ... 8 25
64. ,, II ... ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப் ... 7 50
65. ,, III ... க. த. திருநாவுக்கரசு ... 10 50

*மூலநூல் (Origianl Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
66.	முகலாயப் பேரரசு—I	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
67.	,, II	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
68.	ஆங்கில அரயசிலமைப்பின் வரலாறு—I	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
69.	,, II	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
70.	,, III	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
71.	,, IV	பா. மாணிக்கவேலு	7	00
72.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	6	50
73.	,, II	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	6	75
74.	,, III	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	6	50
75.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	பா. மாணிக்கவேலு	5	00
76.	,, II	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00

அரசியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
*77.	அரசியல் அமைப்புகள்	ஜே. இராமச்சந்திரன்	4	62
78.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	7	50
79.	இந்திய அரசியலமைப்பு	வீ. கண்ணையா	4	75
80.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	டி. செல்லப்பா	8	50
81.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	8	50
82.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	16	00
83.	,, II	,,	18	25
84.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	வீ. கண்ணையா	9	00
85.	,, II	இ. ஜெகதீசன்	7	25

No.	Title	Author	Rs.	P.
86.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	வீ. கண்ணையா	7	50
87.	,, II	டி. செல்லப்பா	7	50
88.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	தி வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	9	25
89.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	வீ. கண்ணையா	6	25
90.	,, II	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	5	75
91.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்		
*92.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
93.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
94.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
95.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
96.	,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
97.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

No.	Title	Author	Rs.	P.
98.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளச்சாரி	8	00
99.	,, II	,,	7	00
100.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
101.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
102.	,, II	,,	9	00
103.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
104.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
105.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	8	00
106.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25

*மூலநூல் (Original Book)

தத்துவம்

107.	இந்து சமயத் தத்துவம்	... ஞூர். ர்ாஜ்ர்பக்துர்ர்	... 5	50
*108.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	... ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	... 3	50
*109.	மேஸைநாட்டுத் தத்துவம்	... ஆர். எஸ். தேசிகன்	... 3	50
110.	அத்துவித தத்துவம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 6	50
111.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	... மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	... 5	50
112.	இந்தியத் தத்துவம்—I	... வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முக சுதந்ரம்	... 3	50
113.	,, II	... ,,	... 6	00
114.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	... சி. இராமலிங்கம்	... 6	00

அறவியல்

115.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	... கோ. மோ. காந்தி	... 8	50

அளவையியல்

116.	அளவையியல் தொடக்க நூல்	... கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	... 2	50

மானிடவியல்

117.	மானிடவியல்	... ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	... 4	75
118.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	... கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	... 5	50
*119.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	... எஸ். இலட்சுமி	... 3	50

சமூகவியல்

120.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	... ஜே. நாராயணன்	... 10	50

புவியியல்

எண்	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
121.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
122.	,, II	,,	8	75
123.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*124.	தென் கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*125.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலுமேலு	8	25
*126.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*127.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*128.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துகிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*129.	புவிப்பிறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*130.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயசந்திரன்	9	00
*131.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*132.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
133.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
134.	,, II	,,	5	00
135.	காலநிலை இயல்	திருமதி இராதா	10	00
136.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
137.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
138.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
139.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
140.	,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
141.	,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5	75

*மூலநூல் (Original Book)

புள்ளியியல்

			ரூ.	பை.
*142.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	00
143.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
144.	,, II	இராஜகோபாலன்	14	00
145.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6	50

உயர்கணிதம்

*146.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12	50
*147.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8	00
*148.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9	00

விலங்கியல்

*149.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12	00

பௌதிகவியல்

150.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00

விஞ்ஞானம்

*151.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*152.	ரேடியோ	டாக்டர் பி. திருஞான சம்பந்தம்	4	75
*153.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*154.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணாமலை	3	50
*155.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறு	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*156.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*157.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

மருத்துவம்

*158.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	... டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	... 2	50
159.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	... டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	... 8	25
*160.	பாக்டீரியா	... சு. சுந்தரம்	... 2	50
161.	புற்றுநோய்	... அ. கதிரேசன்	... 3	50
162.	உடலியங்கியல்—I	... டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ்.கே துரைராஜ் ஆர். சேது	... 6	75
163.	,, II	... ,,	... 5	50
164.	என்புருக்கி நோய்	... டாக்டர் அ. கதிரேசன்	... 7	25

பொறியியல்

165.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	... கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

கூட்டுறவு

166.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	... அ. வேல்மணி	... 5	50

சட்டம்

*167.	குற்றவியல் சட்டம்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10	00

*மூல நூல் Original Book

பொதுநூல்கள்

				ரூ.	பை.
168.	மகாத்மா காந்தி	...	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
169.	விவசாயப் புரட்சி	...	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
*170.	சேமக் கை—நூல்	...	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*171.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	...	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00
*172.	உணவும் ஊட்டமும்	...	தி. வேங்கட கிருஷ்ணய்யங்கார்	4	50

புகுமுக (P. U. C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

				ரூ.	பை.
*173.	உலக வரலாறு	...	டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	4	00
*174.	பொருளாதாரம்	...	ஜி. சிதம்பரம்	2	75
*175.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	கு. ஆளுடைய பிள்ளை	2	50
*176.	,, II	...	,,	2	25
*177.	பௌதிகம்	...	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	7	50
*178.	புகுமுக பௌதிகம்	...	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	5	75
*179.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	...	கே. ராஜகோபாலன்	7	00
*180.	,, II	...	,,	3	00
*181.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	...	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	7	00
*182.	,, II	...	,,	4	50
*183.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	ஆர். மகாதேவன்	4	75
*184.	,, II	...	,,	3	25
*185.	வேதியியல்	...	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	7	00
*186.	புகுமுக வேதியியல்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	5	50
*187.	விலங்கியல்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	4	00
*188.	புகுமுக விலங்கியல்	...	பெ. மா. அண்ணாமலை	7	25
*189.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	...	எஸ். சுந்தரம்	4	50

பட்டப்படிப்பிற்குரிய [B.Sc.] நூல்கள்

பௌதிகம் (Physics)

	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
*190.	எந்திரவியல்—சிறப்புப்பாடம் (BookI)	ஆர். நாகராசன்	6	25
*191.	வெப்பவியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. நாச்சிமுத்து	5	25
*192.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	டி. கமலக்கண்ணன், எஸ். கிருட்டிணசாமி	4	50
*193.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்—I (Book I)	பி. தங்கராஜன்	4	00
*194.	,, (Book II)	,,	3	00
*195.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம்	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம்	4	50
*196.	மின்னியல் காந்தவியல் (Book I)	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*197.	ஒளியியல் சிறப்புப்பாடம்	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன்	7	75

வேதியியல் (Chemistry)

	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
*198.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப்பாடம்	டி. இராமலிங்கம்	2	25
*199.	பௌதிக வேதியியல் (Book I)	டி. சக்திவேலு	4	00
*200.	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	சி. ஏ. பத்மநாபன்	6	50
*201.	கனிம வேதியியல் (Book I)	பி. டி. முனியப்பா	4	00
*202.	பொது பௌதிக வேதியியல்-துணைப்பாடம்	ஆர். துளசிதாஸ்	4	75

கணிதம் (Mathematics)

	நூல்	ஆசிரியர்	ரூ.	பை.
*203.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	டி. கோவிந்தராஜன், கே. முத்துசாமி	4	25
*204.	தொகுமுறைவரைகணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00

*மூல நூல் Original (Book)

கணிதம் தொடர்ச்சி

			ரூ.	பை.
*205.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*206.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	8	25
*207.	கணிதம்— துணைப்பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*208.	நிலையியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*209.	புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்	எஸ். கருப்பையா	8	50

விலங்கியல் (Zoology)

*210.	முதுகெலும்பற்றவை I—சிறப்புப்பாடம்	ஆர். முருகேசன்	11	50
*211.	,, II—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	11	25
*212	முதுகுநாணுள்ளவை I—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	திருமதி ராணி கந்தசுவாமி	8	00
*213	,, (Book II)		9	75
*214.	முதுகுத்தண்டுள்ளவை-II-சிறப்புப்பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	11	75
*215.	முதுகுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	9	00
*216.	முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப்பாடம்	வி. சேது	10	00

தாவரவியல் (Botany)

*217.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப்பாடம்	கே. ராஜசேகரன்	11	00
*218.	தாவரப் புற அமைப்பியல்	கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	9	25
*219.	தாவர உள்ளமைப்பியல்	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25

*மூல நூல் (Original Book)

